Lösungen zu den Ferienübungen für die 10. Klasse (G8)

1. a) $x = \frac{135°}{360°} \cdot 2\pi = \frac{3}{4}\pi$ b) $\varphi = \frac{11\pi}{16 \cdot 2\pi} \cdot 360° = 123{,}75°$ c) $\varphi = \frac{2{,}8}{2\pi} \cdot 360° \approx 160{,}4°$

2. b) $\sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$ => $\frac{1}{2}\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$; φ $\varphi = 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 38{,}9°$

   c) A = A $_{\text{Halbkreis}}$ – (A $_{\text{Sektor}}$ – A $_{\text{Dreieck gleichschenklig}}$) =

   = A $_{\text{Halbkreis}}$ – A $_{\text{Sektor}}$ + A $_{\text{Dreieck gleichschenklig}}$ =

$$= \tfrac{1}{2}a^2\pi - \tfrac{38{,}9°}{360°}(3a)^2\pi + \tfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot\sqrt{(3a)^2 - a^2} =$$
$$= \tfrac{1}{2}a^2\pi - \tfrac{38{,}9°}{40°}a^2\pi + 2\sqrt{2}a^2 = a^2\left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{38{,}9°}{40°}\pi + 2\sqrt{2}\right) \approx 1{,}3a^2$$

   u = b $_{\text{Sektor}}$ + b $_{\text{Halbkreis}}$ = $\frac{19{,}5°}{360°} \cdot 2\cdot 3a\cdot\pi + \frac{180°}{360°} \cdot 2\cdot a\cdot\pi = \frac{19{,}5}{60}a\pi + a\pi = \frac{79{,}5}{60}a\pi \approx 4{,}2a$

3. a) O $_{\text{Halbkugel}}$ = $\frac{1}{2}\cdot 4r^2\pi = 2r^2\pi$; M $_{\text{Kegel}}$ = $r\cdot\pi\cdot\sqrt{r^2 + r^2} = r\cdot\pi\cdot\sqrt{2}\,r = \sqrt{2}\,r^2\pi$

   $\frac{2r^2\pi - \sqrt{2}r^2\pi}{\sqrt{2}r^2\pi} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142$ => O $_{\text{Halbkugel}}$ ist ca. um 41,4% größer als M $_{\text{Kegel}}$

   b) V $_{\text{Halbkugel}}$ = $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{2}{3}r^3\pi$; V $_{\text{Kegel}}$ = $\frac{1}{3}r^2\pi\cdot r = \frac{1}{3}r^3\pi$

   => V $_{\text{Halbkugel}}$ ist doppelt so groß wie V $_{\text{Kegel}}$, also um 100% größer als V $_{\text{Kegel}}$.

4. a) sin 225° = sin (180° + 45°) = – sin 45° = – $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

   b) cos (–420°) = cos (–420° + 2 • 360°) = cos 300° = cos (360° – 60°) = cos 60° = 0,5

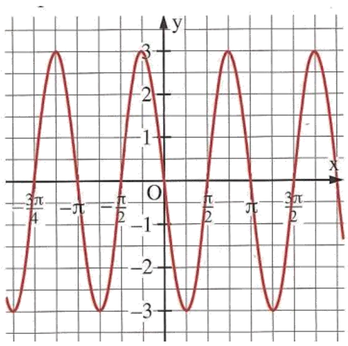
5. a) sin φ = 0,1234 => $\sin^{-1}(0{,}1234) = 7{,}1°$ => $\varphi_{I} = 7{,}1°$; $\varphi_{II} = 180° - 7{,}1° = 172{,}9°$

   b) cos φ = – 0,4321 => $\cos^{-1}(0{,}4321) = 64{,}4°$ => $\varphi_{II} = 180° - 64{,}4° = 115{,}6°$; $\varphi_{III} = 180° + 64{,}4° = 244{,}4°$

6. a) sin x = $(-\frac{1}{2}\sqrt{2})$ => x ∈ {–135°; –45°; 225°; 315°} oder x ∈ $\left\{-\frac{3}{4}\pi; -\frac{1}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi\right\}$

   a) cos x = $\frac{1}{2}$ => x ∈ {–300°; –60°; 60°; 300°} oder x ∈ $\left\{-\frac{5}{3}\pi; -\frac{1}{3}\pi; \frac{1}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi\right\}$

7. f (x) = 3 sin (2x – π) = 3 sin [2 (x – $\frac{\pi}{2}$)]



   - Amplitude: 3
   - Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ (*)
   - Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts (**) und 0 nach oben
   - Nullstellen sind wegen (*) und (**) … , – π , $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π , …

8. Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph der Funktion f(x) = b • a^x durch die beiden Punkte P (–2 | 5) und Q (2 | 20) verläuft !

   P ∈ G_f => I) $5 = b\cdot a^{-2}$ Q ∈ G_f => II) $20 = b\cdot a^2$

$$\frac{II}{I} \Rightarrow \frac{20}{5} = \frac{ba^2}{ba^{-2}} \Rightarrow 4 = a^4 \Rightarrow a = 4^{\frac{1}{4}} = 2^{2\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$$

   a in II) $20 = b\cdot 2$; $b = 10$ $f(x) = 10\cdot\sqrt{2}^{\,x}$

9. a) $\log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt[3]{a^4}\right) = \log_{\sqrt{a}}\left(a^{\frac{4}{3}}\right) = x \Rightarrow \sqrt{a}^{\,x} = a^{\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{8}{3}$

b) $2 \cdot \lg\left(\frac{1}{a}\right) + \lg a^3 - \lg a = \lg\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \lg a^3 - \lg a = \lg\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot a^3 : a\right] = \lg 1 = \log_{10} 1 = 0$

<u>oder:</u> $2 \cdot \lg\left(\frac{1}{a}\right) + \lg a^3 - \lg a = 2 \cdot \lg a^{-1} + 3 \cdot \lg a - \lg a = -2 \lg a + 2 \lg a = 0$

10. a) $7^{3x+2} = 10^x$

$\lg(7^{3x+2}) = \lg(10^x)$

$(3x+2) \cdot \lg 7 = x \cdot \lg 10$

$3x \cdot \log 7 - x \cdot \lg 10 = -2 \cdot \lg 7$

$x(3 \cdot \log 7 - \lg 10) = -2 \cdot \lg 7$

$x = \frac{-2 \cdot \lg 7}{3 \cdot \lg 7 - 1} \approx -1{,}1$

b) $4^x + 4^{2-x} = 17$ $\qquad 4^x = v$

$v + 16 \cdot v^{-1} = 17 \quad | \cdot v$

$v^2 + 16 - 17v = 0$

$v^2 - 17v + 16 = 0$

$v_{1/2} = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2}$

$v_1 = 1$; $4^x = 1$; $x_1 = 0$

$v_2 = 16$; $4^x = 16$; $x_2 = 2$

11. a) $f(x) = b \cdot a^x$ $\qquad b = 1$; $a = 1 - 40\% = 0{,}6$ $\qquad f(x) = 1 \cdot 0{,}6^x$

b) $f(5) = 0{,}6^5 = 0{,}078$ => Die Beleuchtungsstärke hat sich um ca. 92,2 % reduziert.

c) $f(x) = 0{,}5$ => $0{,}5 = 0{,}6^x$ => $x = \log_{0,6} 0{,}5 = \lg 0{,}5 : \lg 0{,}6 \approx 1{,}36$ Tiefe: 1,36 m

12. a)

	J	$\bar{J}$	
T	80	10	90
$\bar{T}$	20	10	30
	100	20	120

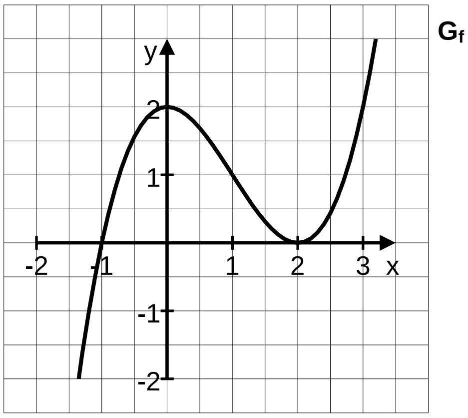
b) $P(J \cup T) = P(J) + P(T) - P(J \cap T) = \frac{100}{120} + \frac{90}{120} - \frac{80}{120} = \frac{11}{12}$ oder $P(J \cup T) = 1 - P(\bar{J} \cap \bar{T}) = 1 - \frac{10}{120} = \frac{11}{12}$

c) $P_{\bar{J}}(T) = \frac{P(\bar{J} \cap T)}{P(\bar{J})} = \frac{|\bar{J} \cap T|}{|\bar{J}|} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

13. $f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 2$; Nullstelle $x_1 = -1$

$(0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 2) : (x + 1) = 0{,}5x^2 - 2x + 2$; $\quad x_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 2}}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{2}{1} = 2$: doppelte NS, kein VZW

$\underline{-(0{,}5x^3 + 0{,}5x^2)}$
$\quad -2x^2 \quad + 2$
$\quad \underline{-(-2x^2 - 2x)}$
$\qquad 2x + 2$
$\qquad \underline{-(2x + 2)}$
$\qquad\quad 0$



$f(x) = 0{,}5(x+1)(x-2)^2$; $f(0) = 2$

$f(x) = 0{,}5x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right)$

$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$; $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

14. a) $f(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$ => G_f ist achsensymm. zur y – Achse;

Nullstellen: $x_1 = (-1)$; $x_2 = 1$

b) $g(x) = \frac{4x-3}{2x+1}$

$g(-x) = \frac{-4x-3}{-2x+1} = \frac{4x+3}{2x-1}$ => $g(-x) \neq g(x)$ und $g(-x) \neq -g(x)$: G_f weist keine Symmetrie auf;

Nullstelle: $g(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

c) $h(x) = 1{,}5^x - 12$

$h(-x) = 1{,}5^{-x} - 12 = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 12$ => $h(-x) \neq h(x)$ und $h(-x) \neq -h(x)$: G_h weist keine Symmetrie auf;

Nullstelle: $h(x) = 0$ λ $x = \log_{1,5} 12$ λ $x \approx 6{,}13$

d) $k(x) = \sin(2x)$

$k(-x) = \sin(-2x) = -\sin(2x)$ => G_k ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung;

Nullstellen: $k(x) = 0$ λ $2x = k \cdot ƒ$; k Φ ≈

λ $x = \frac{1}{2} k \cdot ƒ$; k Φ ≈

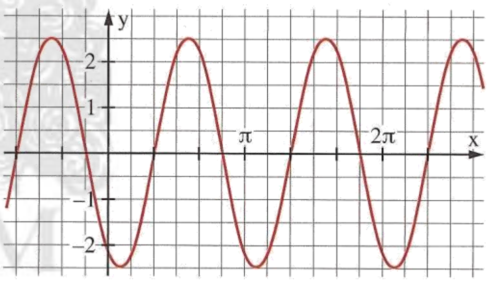
<u>Lösungen zu den Zusatzaufgaben</u>

15. $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d = a \cdot \sin\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right] + d$

Amplitude: $a = 2{,}5$ Periode: $\frac{2\pi}{b} = \pi$ => $b = 2$

Verschiebung: $\frac{1}{3}\pi$ nach rechts => $\frac{c}{b} = -\frac{1}{3}\pi$ => $c = -\frac{2}{3}\pi$

$d = 0$ => $f(x) = 2{,}5 \cdot \sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$



16. a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3)$

=> <u>Nullstellen:</u> $x_1 = 0$;
Lösungsformel: $x_2 = (-1)$; $x_3 = 3$

b) $g(x) = f(x+2)$ => G_g ist im Vergleich zu G_f um 2 Einheiten nach links verschoben;

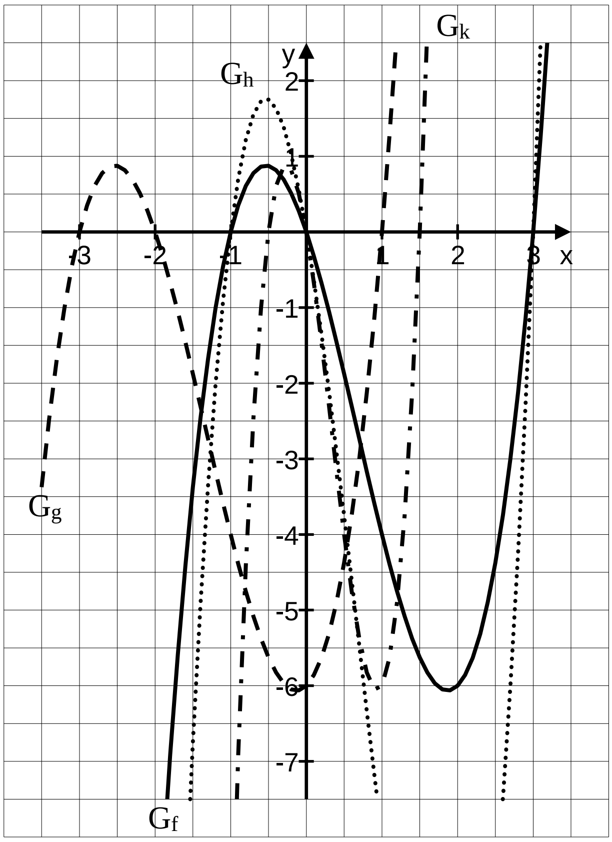
=> <u>Nullstellen:</u>
$x_1 = (-2)$; $x_2 = (-3)$; $x_3 = 1$

$h(x) = 2 \cdot f(x)$ => G_h ist im Vergleich zu G_f mit dem Faktor 2 in y – Richtung gestreckt;

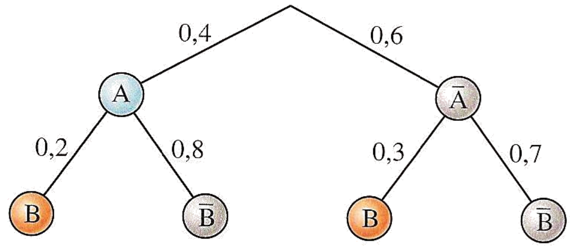
=> <u>Nullstellen:</u>
$x_1 = 0$; $x_2 = (-1)$; $x_3 = 3$

$k(x) = f(2x)$ => G_k ist im Vergleich zu G_f mit dem Faktor 0,5 in x – Richtung gestreckt;

=> <u>Nullstellen:</u>
$x_1 = 0$; $x_2 = (-0{,}5)$; $x_3 = 1{,}5$



17. a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$; $P_A(B) = 0{,}2$



b) $P(\overline{B}) = P_A(\overline{B}) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(\overline{B}) \cdot P(\overline{A}) =$
$0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}74$ **oder**

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - [P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A})] =$
$1 - 0{,}2 \cdot 0{,}4 - 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}74$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + (1 - 0{,}74) - 0{,}08 = 0{,}58$ **oder**

$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 1 - 0{,}42 = 0{,}58$

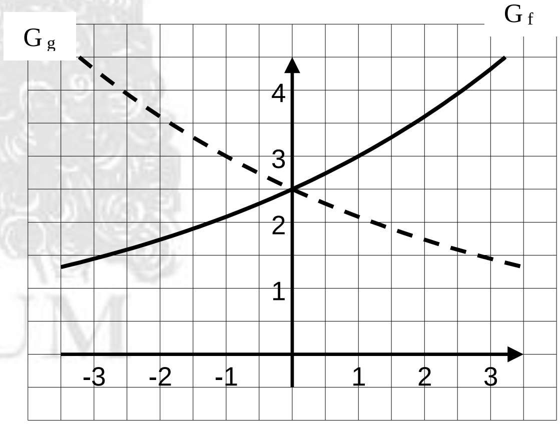
d)

	B	$\overline{B}$	
A	0,08	0,32	0,4
$\overline{A}$	0,18	0,42	0,6
	0,26	0,74	1

18. $f(x) = a(x+1)^2(x-3)$

$P(0 \mid -1{,}5) \in G_f \Rightarrow -1{,}5 = a \cdot 1^2 \cdot (-3) \Rightarrow a = 0{,}5$

$\Rightarrow$ **$f(x) = 0{,}5(x+1)^2(x-3)$**



19. $A(0 \mid 2{,}5) \in G_f \Rightarrow 2{,}5 = b \cdot a^0$; $b = 2{,}5$
$B(1 \mid 3) \in G_f \Rightarrow 3 = 2{,}5 \cdot a^1$; $a = 1{,}2$

$f(x) = 2{,}5 \cdot 1{,}2^x$ $g(x) = 2{,}5 \cdot 1{,}2^{-x} = 2{,}5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^x$

20. a) $f(x-1) = a^{(x-1)} = a^x \cdot a^{-1} = \frac{1}{a} \cdot a^x = \frac{1}{a} \cdot f(x)$
Der Funktionswert wird durch a dividiert.

b) $f(2x) = a^{2x} = (a^x)^2 = [f(x)]^2$
Der Funktionswert wird quadriert.

21. a) $f(x) = x^2 + 2x$

G_g ist im Vgl. zu G_f mit dem Faktor 1,5 in y – Richtung gestreckt $\Rightarrow$ $g(x) = 1{,}5 \cdot f(x) = 1{,}5x^2 + 3x$

G_h ist im Vgl. zu G_f an der y – Achse gespiegelt und
mit dem Faktor 0,5 in y – Richtung gestreckt $\Rightarrow$ $h(x) = 0{,}5 \cdot f(-x) = 0{,}5x^2 - x$

b) $f(x) = 0{,}5^x$

G_g ist im Vgl. zu G_f an der x – Achse gespiegelt
und um 1 nach oben verschoben $\Rightarrow$ $g(x) = -f(x) + 1 = -0{,}5^x + 1$

G_h ist im Vgl. zu G_f um 0,5 nach links verschoben $\Rightarrow$ $h(x) = f(x + 0{,}5) = 0{,}5^{x+0{,}5} =$

$= 0{,}5^x \cdot 0{,}5^{0{,}5} = \sqrt{0{,}5} \cdot 0{,}5^x$