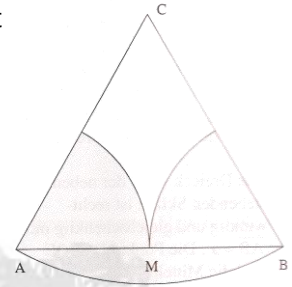


Wissen / Können	Aufgaben und Beispiele	Lösungen
I) Kreis und Kugel Die Kreiszahl π ist eine <u>irrationale</u> Zahl, also ein unendlicher, nicht periodischer Dezimalbruch. Berechnungen an Kreissektoren: Radius r, Mittelpunktswinkel φ, Fläche A, Bogenlänge b $A_s = \frac{\varphi}{360^\circ} r^2 \pi \quad ; \quad b_s = \frac{\varphi}{360^\circ} 2r\pi \quad ; \quad A_s = \frac{1}{2} br$ Bogenmaß: Die Größe eines Winkels kann im Gradmaß (φ) oder im Bogenmaß (x) angegeben werden: $x = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 2\pi \quad ; \quad \varphi = \frac{x}{2\pi} \cdot 360^\circ$ $\varphi \in [0^\circ; 360^\circ] \quad ; \quad x \in [0; 2\pi] \quad ; \quad 180^\circ \leftrightarrow \pi \quad ; \quad 360^\circ \leftrightarrow 2\pi$ Berechnungen an der Kugel: Radius r, Volumen V, Oberfläche O $V = \frac{4}{3} r^3 \pi \quad ; \quad O = 4r^2 \pi$	1. Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit Seitenlänge a. M ist der Mittelpunkt von [AB]. Berechne Inhalt und Umfang der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a!  2. Rechne jeweils in das andere Maß um! 15° $\frac{7\pi}{10}$ 4,5 3. a) Wie viel Prozent des zur Verfügung stehenden Raumes bleiben leer, wenn man eine Kugel in einen möglichst kleinen zylinderförmigen Körper verpackt? b) Vergleiche die Kugeloberfläche mit der Mantelfläche des Zylinders!	1. $A_{\text{grau}} = A_{\text{Sektor groß}} - A_{\Delta \text{ gleichseitig}} + 2 \cdot A_{\text{Sektor klein}} =$ $= \frac{60^\circ}{360^\circ} a^2 \pi - \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} + 2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi =$ $= \frac{1}{6} a^2 \pi - \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} + \frac{1}{12} a^2 \pi =$ $= \frac{1}{4} a^2 \pi - \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = \frac{1}{4} a^2 (\pi - \sqrt{3}) \approx 0,35 a^2$ $u_{\text{grau}} = b_{\text{groß}} + 2 \cdot b_{\text{klein}} =$ $= \frac{60^\circ}{360^\circ} 2a\pi + 2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} 2\left(\frac{a}{2}\right)\pi =$ $= \frac{1}{3} a\pi + \frac{1}{3} a\pi = \frac{2}{3} a\pi \approx 2,09 a$ 2. a) $x = \frac{15^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{1}{12} \pi$ b) $\varphi = \frac{7\pi}{10 \cdot 2\pi} \cdot 360^\circ = 126^\circ$ c) $\varphi = \frac{4,5}{2\pi} \cdot 360^\circ \approx 257,8^\circ$ 3. a) $V_{\text{Rest}} = V_Z - V_K = r^2 \pi \cdot 2r - \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{2}{3} r^3 \pi$ $\text{Anteil}_{\text{Rest}} = \frac{V_{\text{Rest}}}{V_Z} = \frac{\frac{2}{3} r^3 \pi}{2r^3 \pi} = \frac{1}{3} \approx 33,3\%$ b) $O_K = 4r^2 \pi$ $M_Z = 2r\pi \cdot 2r = 4r^2 \pi = O_K$

II) Trigonometrie

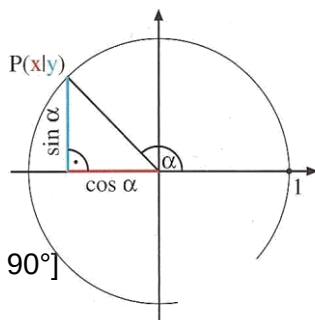
Sinus, Kosinus am Einheitskreis

Für einen beliebigen Punkt $P(x|y)$ auf dem Einheitskreis gilt:

$$x = \cos \alpha ; y = \sin \alpha$$

Aus Symmetriegründen gilt: mit $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$

Die Sinus- und Kosinuswerte der Winkel α , $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ und $360^\circ - \alpha$ haben denselben Betrag; zum Vorzeichen: vgl. Einheitskreis



Trigonometrische Funktionen auf $\mathbb{R}$

Für den Winkel x im Bogenmaß sind die trigon. Funktionen

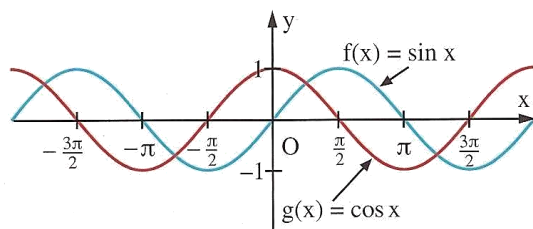
f: $x \mapsto \sin x$ Sinusfunktion

f: $x \mapsto \cos x$ Kosinusfunktion

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Ihre Wertemengen sind $W = [-1; 1]$.

Sie sind periodisch mit der Periode 2π , d.h.:

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x ; \cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x$$



allgemeine Sinusfunktion $x \in \mathbb{R}, a \neq 0, b > 0$

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d = a \cdot \sin\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right] + d$$

- Amplitude: $|a|$
- Periode: $\frac{2\pi}{b}$
- Verschiebung: um $\frac{c}{b}$ nach rechts ($c < 0$) bzw. links ($c > 0$)
- Verschiebung: um d nach oben ($d > 0$) bzw. unten ($d < 0$)

1. Bestimme exakt !

a) $\sin 150^\circ$

b) $\cos 225^\circ$

2. Für welche Winkel zwischen 0° und 360° gilt:

a) $\sin \alpha = -0,9580$

b) $\cos \alpha = -0,9909$?

3. Bestimme exakt alle x mit $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, für die gilt:

a) $\sin x = 1$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

4. $f(x) = \frac{3}{2} \sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$

Bestimme Amplitude, Periode, Verschiebung und Nullstellen der Funktion f für $x \in [-\pi; 2\pi]$ und zeichne G_f !

1. a) $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

b) $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

2. a) $\sin \alpha = -0,9580 \rightarrow \alpha \in \text{Quadrant III; IV}$
 $\varphi = \sin^{-1}(0,9580) \approx 73,3^\circ$

$\rightarrow \alpha_1 = 180^\circ + \varphi = 253,3^\circ$

$\alpha_2 = 360^\circ - \varphi = 286,7^\circ$

b) $\cos \alpha = -0,9909 \rightarrow \alpha \in \text{Quadrant II; III}$
 $\varphi = \cos^{-1}(0,9909) \approx 7,7^\circ$

$\rightarrow \alpha_1 = 180^\circ - \varphi = 172,3^\circ$

$\alpha_2 = 180^\circ + \varphi = 187,7^\circ$

3. a) $\sin y = 1$ für $y \in \{-270^\circ; 90^\circ\}$ also

$\sin x = 1$ für $x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$

b) $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ für

$y \in \{-210^\circ; -150^\circ; 150^\circ; 210^\circ\}$ also

$x \in \left\{-\frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$

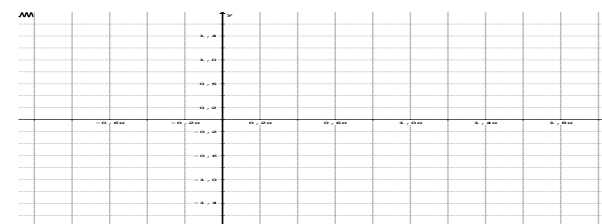
4. $f(x) = \frac{3}{2} \sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3}{2} \sin\left[2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right]$

• Amplitude: $\frac{3}{2}$

• Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ (*)

• Verschiebung: $\frac{1}{3}\pi$ nach rechts (**)

• Nullst.: wegen (*) und (**) gilt $f(x) = 0$ für
 $x \in \left\{-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}\right\}$



III) Exponentialfunktion und Logarithmus**Lineares Wachstum: $f(t) = f(0) + d \cdot t$**

Konstanter absoluter Zuwachs in gleichen Zeitschritten;
d bezeichnet die absolute Änderung pro Zeitschritt.

Exponentielles Wachstum: $f(t) = f(0) \cdot a^t$

Konstanter Wachstumsfaktor a in gleichen Zeitschritten;
a-1 bezeichnet die relative/prozentuale Änderung pro Zeitschritt.

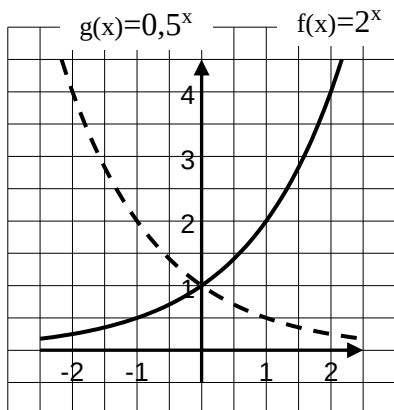
Halbwertszeit: Zeit, in der sich Fkt.wert jeweils halbiert

Verdopplungszeit: Zeit, in der sich Fkt.wert jeweils verdoppelt

Exponentialfunktionen

Funktionen der Form $f(x) = b \cdot a^x$ $a > 0, a \neq 1$

- $b = f(0)$: Anfangswert/-bestand
- $a > 1$: G_f str. mon. steigend
- $0 < a < 1$: G_f str. mon. fallend
- $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}, b > 0$
- $P(0 | b) \in G_f$
- Asymptote von G_f : x-Achse
- Graph von $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ erhält man aus Graph von $f(x) = a^x$
d. Spiegelung an der y-Achse

**Logarithmen**

Die eindeutige Lösung der Exponentialgleichung $a^x = b$ nennt man Logarithmus von b zur Basis a: $a^x = b \leftrightarrow x = \log_a b$

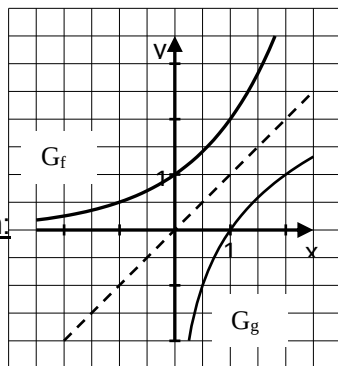
$g(x) = \log_a x$ ist Umkehrfkt. von $f(x) = a^x$

Rechenregeln: $u, v, a > 0; a \neq 1$

- (1) $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
- (2) $\log_a(u : v) = \log_a u - \log_a v$
- (3) $\log_a u^x = x \cdot \log_a u$
- (4) $\log_a b = \lg b : \lg a$ ($\lg$: Zehnerlog.)

Lösungsstrat. Exponentialgleichungen:

- Vergleich der Exponenten bei gleicher Basis
- beidseitiges Logarithmieren



1. Ein Sparer legt 1000 € bei zwei unterschiedlichen Banken für jeweils 10 Jahre an:

- a) Zinssatz $i = 5\%$; Zinsen werden im Folgejahr mitverzinst („Zinseszins“);
- b) Zinssatz $i = 5\%$; Zinsen werden am Jahresende ausbezahlt.

Vergleiche den Kontostand zu Laufzeitende !

2. Bestimme a und b so, dass der Graph der Exponentialfkt. $f(x) = b \cdot a^x$ durch die Punkte P (3 | 5) und Q (5 | 0,2) geht !

3. Löse ohne Taschenrechner !

$$\log_2(5x) = 1 + \log_2 6$$

4. Löse folgende Exponentialgleichungen !

- a) $6^{4x-9} = 36^{1,5}$
- b) $5^{2x+1} = 17$
- c) $5^{2x} = 125 + 20 \cdot 5^x$

5. a) Unter normalen Bedingungen vermehren sich Cholera-Bakterien so stark, dass ihre Anzahl stündlich um das siebenfache steigt. Berechne die Verdopplungszeit !

- b) Anfangs waren es 100 Bakterien. Wann werden es unter normalen Bedingungen ungefähr 1 Milliarde Bakterien sein ?

1. a) $k(x) = 1000 \cdot 1,05^x$

$$k(10) = 1000 \cdot 1,05^{10} \approx 1628,89$$

- b) $k(x) = 1000 + 0,05 \cdot 1000 \cdot x$

$$k(10) = 1000 + 0,05 \cdot 1000 \cdot 10 = 1500$$

2. $P \in G_f \Rightarrow I) 5 = b \cdot a^3$

$$Q \in G_f \Rightarrow II) 0,2 = b \cdot a^5$$

$$\frac{II}{I} \Rightarrow \frac{0,2}{5} = \frac{b a^5}{b a^3} \Rightarrow \frac{1}{25} = a^2 \Rightarrow \frac{1}{5} = a \quad \text{da } a > 0$$

$$a \text{ in I) } 5 = b \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow b = 625 \quad \mathbf{f(x) = 625 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x}$$

3. $\log_2(5x) = 1 + \log_2 6$

$$\log_2(5x) = \log_2 2 + \log_2 6$$

$$\log_2(5x) = \log_2(2 \cdot 6)$$

$$5x = 12$$

da: $\log_2$ streng monoton

$$x = 2,4$$

4. a) $6^{4x-9} = 6^2 \cdot 1,5$

$$4x - 9 = 3$$

da: 6^x streng monoton

$$x = 3$$

- b) $\lg(5^{2x+1}) = \lg 17$

$$(2x + 1) \cdot \lg 5 = \lg 17$$

$$2x + 1 = \lg 17 : \lg 5$$

$$x = \left(\frac{\lg 17}{\lg 5} - 1 \right) : 2 - 1 \approx 0,38$$

- c) $5^{2x} = 125 + 20 \cdot 5^x$ **Substitution: $5^x = v$**

$$v^2 - 20v - 125 = 0$$

$$v_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-125)}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm 30}{2}$$

$$v_1 = (-5) \Rightarrow 5^x = (-5) \quad \text{Widerspruch: } 5^x > 0$$

$$v_2 = 25 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow \mathbf{x = 2}$$

5. a) $f(x) = b \cdot 8^x$

$$2b = b \cdot 8^x ; 2 = 8^x ; x = \log_8 2 = 1/3$$

Verdopplungszeit: 20 Minuten.

- b) $10^9 = 10^2 \cdot 8^x$

$$10^7 = 8^x$$

$$x = \log_8 10^7 = \lg 10^7 : \lg 8 = 7 : \lg 8 \approx 7,75$$

Dauer: ca. 7 Stunden 45 Minuten

IV) Vierfeldertafel und bedingte Wahrscheinlichkeit:**Vierfeldertafel:**

Zwei Ereignisse A und B ermöglichen die Zerlegung der Ergebnismenge Ω eines Zufallsexperiments in vier Teilmengen, so dass jedes Ergebnis $\omega \in \Omega$ genau einer davon angehört:

	B	$\bar{B}$
A	$A \cap B$	$A \cap \bar{B}$
$\bar{A}$	$\bar{A} \cap B$	$\bar{A} \cap \bar{B}$

Man kann in die Vierfeldertafel auch die Wahrscheinlichkeiten der genannten Ereignisse eintragen:

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	P(A)
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	P($\bar{A}$)
	P(B)	P($\bar{B}$)	

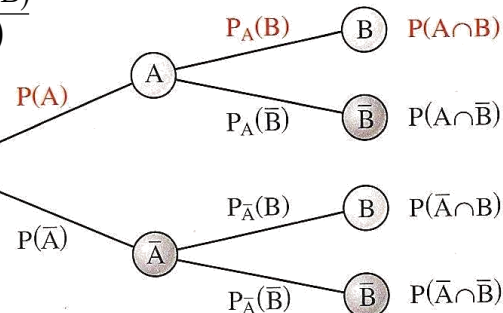
Aus jeder Vierfeldertafel lassen sich zwei Baumdiagramme ableiten: 1. Stufe A und $\bar{A}$, 2. Stufe B und $\bar{B}$ oder umgekehrt.

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

Sind A und B zwei Ereignisse mit $P(A) \neq 0$, so bezeichnet man die Wsk. des Eintretens von B unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist, als **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P_A(B)$.

Es gilt: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Wählt man A und $\bar{A}$ als 1. Stufe, so ergibt sich folgendes Baumdiagramm:

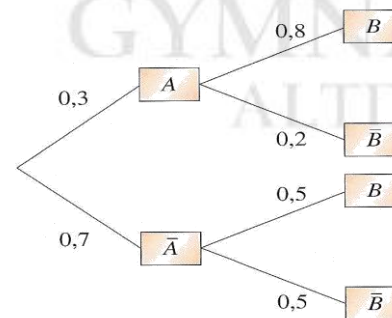


1. Auf dem Flughafen von Mallorca wurden deutsche Urlauber nach ihren Fremdsprachenkenntnissen befragt:

70 Urlauber gaben an, Spanisch sprechen zu können, 60 Reisende sprechen kein Englisch. 50 der befragten Personen gaben an, keine der beiden Fremdsprachen zu beherrschen, das waren 25 % aller befragten Personen.

- a) Stelle mit Hilfe des Textes eine Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten auf !
- b) Zeichne das zugehörige Baumdiagramm mit dem 1. Merkmal „Englischkenntnisse“ und beschrifte die Äste mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten !
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein befragter Urlauber Englisch und Spanisch beherrscht ?
- d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein befragter Urlauber auch Spanisch spricht, wenn er Englisch beherrscht ?
- e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine befragte Person auch Englisch spricht, wenn sie Spanisch beherrscht ?

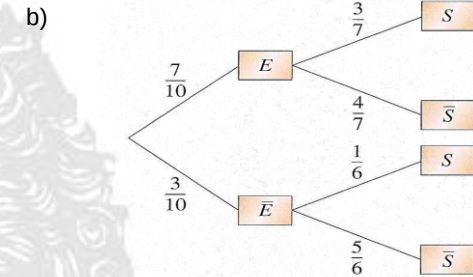
2. Gegeben ist folgendes Baumdiagramm:



Stelle die zugehörige Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten auf !

1. a) $50 \leftrightarrow 25\% \text{ von } |\Omega| \Rightarrow |\Omega| = 200$

	S	$\bar{S}$	
E	60	80	140
$\bar{E}$	10	50	60
	70	130	200



c) $P(E \cap S) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{10} = 30\%$ Baum

$P(E \cap S) = \frac{60}{200} = \frac{3}{10} = 30\%$ Tafel

d) $P_E(S) = \frac{3}{7}$ Baum

$P_E(S) = \frac{P(E \cap S)}{P(E)} = \frac{|E \cap S|}{|E|} = \frac{60}{140} = \frac{3}{7}$ Tafel

e) $P_S(E) = \frac{P(E \cap S)}{P(S)} = \frac{|E \cap S|}{|S|} = \frac{60}{70} = \frac{6}{7}$ Tafel

2.

	B	$\bar{B}$	
A	0,24	0,06	0,3
$\bar{A}$	0,35	0,35	0,7
	0,59	0,41	1

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24$

$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B) = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35$

V) Ganzrationale Funktionen:

allgemeine Potenzfunktion vom Grad n: $f(x) = a \cdot x^n$, $n \in \mathbb{N}$

n gerade:

$$a > 0 \Rightarrow W_f = \mathbb{R}_0^+$$

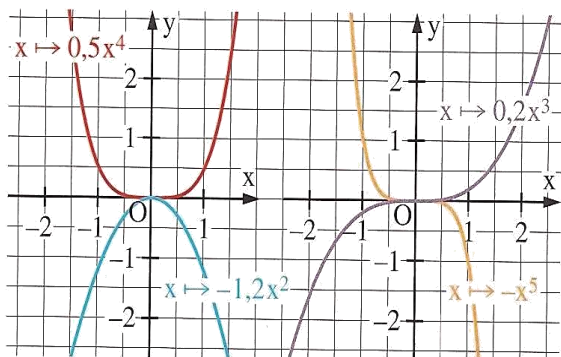
$$a < 0 \Rightarrow W_f = \mathbb{R}_0^-$$

G_f achsensymm.

n ungerade:

$$W_f = \mathbb{R}$$

G_f punktsymm.



Polynom vom Grad n: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}$

Ganzrationale Funktion p(x) vom Grad n

Eine Funktion $p: x \mapsto p(x)$, deren Funktionsterm $p(x)$ ein Polynom vom Grad n ist, heißt ganzrationale Fkt. vom Grad n.

Eigenschaften:

- Das Verhalten von $p(x)$ für betragsmäßig große x – Werte wird durch den Summanden $a_n x^n$ bestimmt.
- Ist a eine Nullstelle von $p(x)$, so lässt sich $p(x)$ in der Form $p(x) = (x - a) \cdot g(x)$ schreiben mit einem Polynom $g(x)$ vom Grad $n - 1$; $(x - a)$ heißt **Linearfaktor**.
- $g(x)$ erhält man durch **Polynomdivision**: $g(x) = p(x) : (x - a)$.
- Somit hat $p(x)$ maximal n Nullstellen.
- $x = a$ ist eine **k – fache Nullstelle**, wenn $(x - a)$ in der vollst. faktorisierten Form von $p(x)$ k –mal vorkommt.
 - k ungerade $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel von $p(x)$ bei $x = a$
 - k gerade $\Rightarrow$ kein Vorzeichenw. von $p(x)$ bei $x = a$

- Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2x^3 + 6x + 4$.
 - Bestimme den Grad von $f(x)$!
 - Bestimme die Koeffizienten von $f(x)$!
 - Bestimme das Verhalten von $f(x)$ für betragsmäßig große x – Werte !
 - Bestimme die Nullstellen von $f(x)$!
 - Skizziere den Verlauf von G_f !
 - Bestimme die Intervalle auf der x – Achse, in denen G_f oberhalb der x – Achse verläuft !
- Bestimme die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion vom Grad 5, die bei $x = -4$ eine dreifache und bei $x = 2$ eine zweifache Nullstelle hat und deren Graph durch den Punkt $P(1 | 6,25)$ verläuft !

$$1. f(x) = -2x^3 + 6x + 4$$

$$a) \text{ höchste Potenz: } 3$$

$$\Rightarrow \text{Grad von } f(x) = 3$$

$$b) a_3 = -2, a_2 = 0, a_1 = 6, a_0 = 4$$

$$c) f(x) = -2x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{4x^3} \right)$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

$$d) \text{ eine Nullstelle: } x_1 = 2 \text{ (erraten: Teiler von } a_0 \text{ !)}$$

$$(-2x^3 + 6x + 4) : (x - 2) = -2x^2 - 4x - 2$$

$$- (-2x^3 + 4x^2)$$

$$- 4x^2 + 6x + 4$$

$$- (-4x^2 + 8x)$$

$$- 2x + 4$$

$$- (-2x + 4)$$

$$0$$

einfache NS:
Vorzeichenwechsel

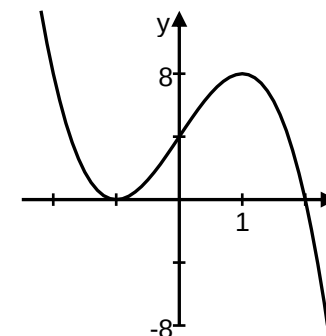
weiterer Nullstellen:

$$-2x^2 - 4x - 2 = -2(x^2 + 2x + 1) = -2(x + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 : \text{doppelte NS, kein Vorzeichenwechsel}$$

$$f(x) = -2(x - 2)(x + 1)^2$$

$$e) f(0) = 4$$



$$f) f(x) > 0 \text{ für } x \in]-\infty; 2[\setminus \{-1\}$$

$$2. f(x) = a(x + 4)^3(x - 2)^2$$

$$6,25 = f(1) = a \cdot 5^3 \cdot (-1)^2 = a \cdot 125 \Rightarrow a = 0,05$$

$$f(x) = 0,05(x + 4)^3(x - 2)^2$$

VI) Eigenschaften von Funktionen und ihrer Graphen:**Verschieben von Funktionsgraphen:**

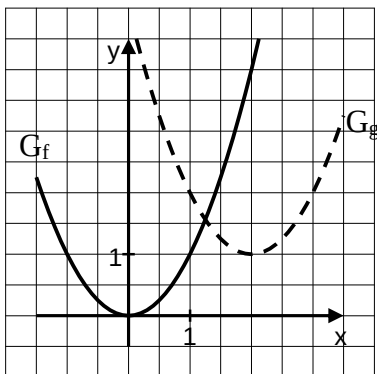
$g(x) = f(x + a) + b \Rightarrow G_g$ entsteht aus G_f durch Verschiebung um $-a$ in x -Richtung und b in y -Richtung

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = (x-2)^2 + 1$$

$a = (-2)$: rechts

$b = 1$: oben

**Strecken von Funktionsgraphen:**

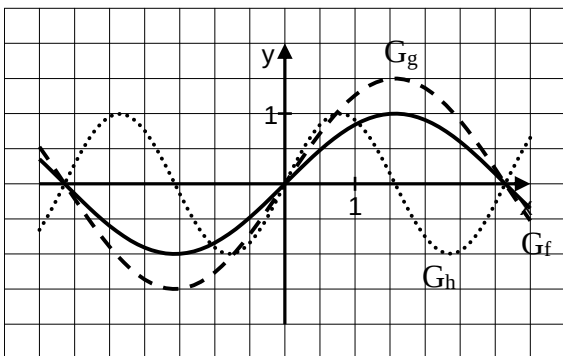
$g(x) = k \cdot f(x)$, $k > 0 \Rightarrow G_g$ ist im Vergleich zu G_f von der x -Achse aus in y -Richtung mit dem Streckfaktor k gestreckt

$h(x) = f(k \cdot x)$, $k > 0 \Rightarrow G_h$ ist im Vergleich zu G_f von der y -Achse aus in x -Richtung mit dem Streckfaktor $\frac{1}{k}$ gestreckt

$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = 1,5 \cdot \sin x$$

$$h(x) = \sin(2x)$$



1. Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \quad \text{und}$$

$$g(x) = x^2 + 4x + 4.$$

Überprüfe rechnerisch, durch welche Verschiebung G_g aus G_f entsteht!

1. **Weg 1: allgemeiner Ansatz:**

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+a) + b = \\ &= (x+a)^2 + 2(x+a) + 3 + b = \\ &= x^2 + 2ax + a^2 + 2x + 2a + 3 + b = \\ &= x^2 + x(2a+2) + a^2 + 2a + 3 + b \end{aligned}$$

Vergleich der Koeffizienten:

$$\text{I) } 2a + 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

$$\text{II) } a^2 + 2a + 3 + b = 4$$

$$1 + 2 + 3 + b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = (-2)$$

G_g ist im Vergleich zu G_f um 1 Einheit nach links und um 2 Einheiten nach unten verschoben.

Weg 2: Scheitelform:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \Rightarrow S_f(-1 | 2)$$

$$g(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \Rightarrow S_g(-2 | 0)$$

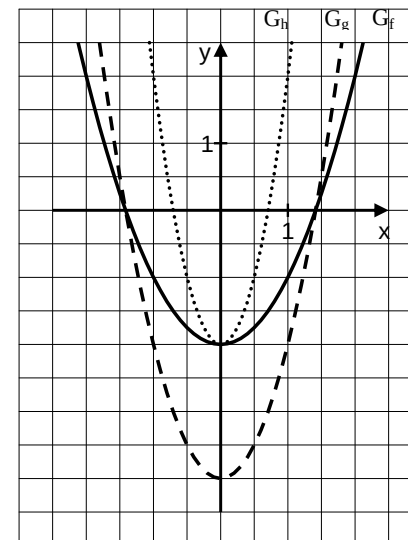
S_g und damit G_g entsteht durch Verschiebung um 1 Einheit nach links und um 2 Einheiten nach unten;

$$g(x) = f(x+1) - 2$$

2. $f(x) = x^2 - 2$

$$\begin{aligned} g(x) &= \\ &= 2 \cdot f(x) = \\ &= 2(x^2 - 2) = \\ &= 2x^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \\ &= f(2 \cdot x) = \\ &= (2x)^2 - 2 = \\ &= 4x^2 - 2 \end{aligned}$$



Spiegeln von Funktionsgraphen:

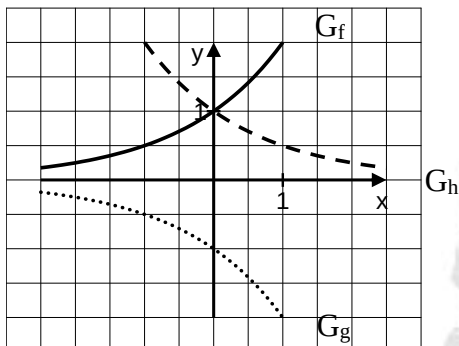
$g(x) = -f(x) \Rightarrow G_g$ entsteht aus G_f durch Spiegelung an der x-Achse

$h(x) = f(-x) \Rightarrow G_h$ entsteht aus G_f durch Spiegelung an der y-Achse

$$f(x) = 2^x$$

$$g(x) = -2^x$$

$$h(x) = 2^{-x}$$



Symmetrie von Funktionsgraphen:

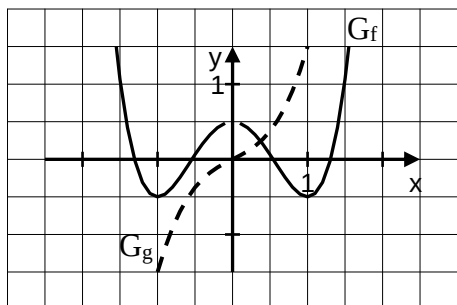
$f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D \Rightarrow G_f$ achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse

$g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in D \Rightarrow G_g$ punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs

Fkt. ganzzahlig $\Rightarrow G_f$ achsensymmetrisch
 $\Leftrightarrow$ alle vorkomm. Exponenten gerade
 $\Rightarrow G_g$ punktsymmetrisch
 $\Leftrightarrow$ alle vorkomm. Exponenten ungerade

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 0,5$$

$$g(x) = x^3 + 0,5x$$



3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Gib die Gleichungen der Funktionen g und h an, deren Graphen durch Spiegelung an der x-Achse (g) bzw. an der y-Achse (h) aus G_f hervorgehen.

Zeichne die drei Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem!

$$3. f(x) = \frac{1}{x-1}$$

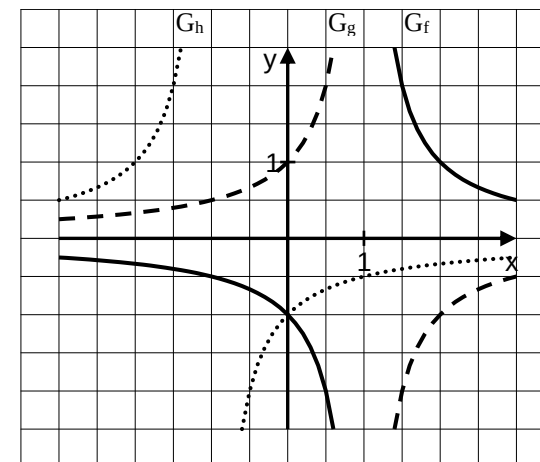
$$sA: x = 1; wA: y = 0$$

$$g(x) = -f(x) = -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$sA: x = 1; wA: y = 0$$

$$h(x) = f(-x) = \frac{1}{-x-1} = \frac{-1}{x+1}$$

$$sA: x = -1; wA: y = 0$$



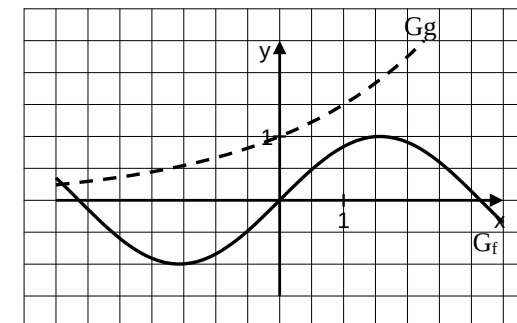
4. $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$$g(-x) = 1,5^{-x} = \left(\frac{1}{1,5}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$g(-x) \neq g(x) \text{ und } g(-x) \neq -g(x)$$

G_g weist keine Symmetrieeigenschaft auf.



Grenzwerte im Unendlichen:

Die Funktionswerte $f(x)$ kommen für beliebig groß werdende x -Werte einer Zahl a beliebig nahe $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$

a heißt Grenzwert der Funktion f für x gegen plus unendlich;

$y = a$ ist dann waagrechte Asymptote von G_f ;

Eine Funktion, die einen Grenzwert besitzt, heißt **konvergent**.

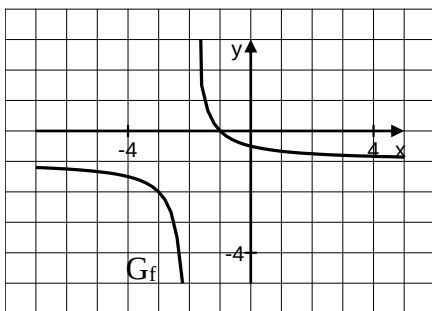
Schwanken die Funktionswerte, besitzt die Funktion f also keinen Grenzwert, so heißt sie **divergent**.

$$f(x) = \frac{1}{x+2} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = (-1)$$

senkr. Asy.: $x = (-2)$

waag. Asy.: $y = (-1)$



Funktionstypen:

- lineare Funktion $\leftrightarrow$ ganzrat. Fkt. ersten Grades
- quadratische Funktion $\leftrightarrow$ ganzrat. Fkt. zweiten Grades
- ganzrationale Fkt. höheren Grades
- gebrochen rationale Fkt.
- trigonometrische Fkt.
- Exponentialfkt.
- Logarithmusfkt.
- Wurfelfkt.

5. Bestimme rechnerisch die Grenzwerte folgender Funktionen für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$:

$$f(x) = \frac{x-1}{2x+2}$$

$$g(x) = -2x^3 - 6x + 4$$

$$h(x) = 0,25^x$$

$$k(x) = \cos x + 1$$

$$5. f(x) = \frac{x-1}{2x+2} = \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(2 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{2}{x}}$$

$$\text{also: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

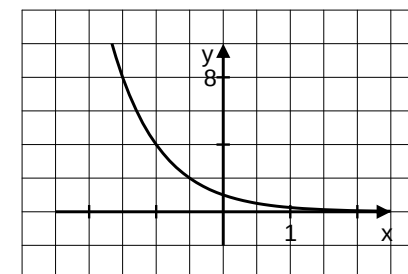
$$g(x) = -2x^3 - 6x + 4 = -2x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$$

$$\text{also: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$h(x) = 0,25^x ; \text{ Basis } a = 0,25 < 1$$

$\Rightarrow G_h$ streng monoton fallend und $h(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\text{also: } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$$



$k(x)$ besitzt keinen Grenzwert im Unendlichen, da die Funktionswerte von k stets zwischen 0 und 2 schwanken;

