Grundwissen 8. Klasse G8

Wissen / Können

Proportionalität

Gehört bei einer Zuordnung x $\mapsto$ y zum *r-fachen* der einen Größe das *r-fache* der anderen Größe , so handelt es sich um eine **direkte Proportionalität.**

Quotientengleichheit: $\frac{y}{x} = q$ ist konstant

q heißt *Proportionalitätsfaktor*

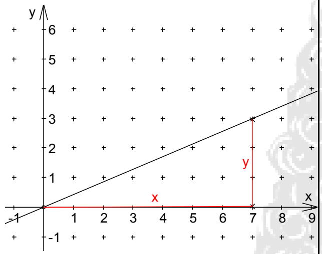
Funktionsvorschrift:

$\boxed{f: x \mapsto q \cdot x}$

Graph: Ursprungsgerade

(q>0: Gerade steigt

q<0: Gerade fällt)



Die **umgekehrt proportionale Zuordnung** x $\mapsto$ y ordnet dem *r-fachen* der einen Größe den *r*-ten *Teil* der anderen Größe zu.

Produktgleichheit:

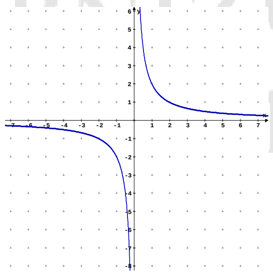
$x \cdot y = p$ ist konstant

Funktionsvorschrift:

$\boxed{f: x \mapsto \frac{p}{x}}$

Definitionsmenge: D=Q\{0}

Graph: Hyperbel



Aufgaben und Beispiele

1. Welche Zuordnungen sind direkt proportional? Begründe deine Antwort.
   a) *Anzahl der Blätter $\mapsto$ Höhe des Stapels*
   b) *Seitenlänge des Quadrats $\mapsto$ Flächeninhalt*
2. Die Tabelle gehört zu einer proportionalen Zuordnung. Bestimme den Proportionalitätsfaktor. Welche Bedeutung hat er? Gib die Zuordnungsvorschrift an und ergänze die fehlenden Werte.

Masse in kg	0,5	1,2	4,3
Preis in €	1,50		

3. Welche Zuordnungen sind umgekehrt proportional? Begründe deine Antwort.
   a) *Geldbetrag $\mapsto$ Anzahl der benötigten Münzen*
   b) *Anzahl der Arbeiter $\mapsto$ benötigte Zeit*
4. Mit 10 Kamelen kann man 500l Wasser transportieren und braucht 4 Stunden zur Oase, wie lange braucht man mit 6 Kamelen?

Lösungen

1. a) k-mal so viele Blätter $\mapsto$ k-mal so hoch
   also: Proportionalität
   b) $A_{Quadrat} = s^2$
   k-fache Seitenlänge $\mapsto$ k^2-facher Flächeninhalt
   also: keine Proportionalität
2. $\frac{y}{x} = q = \frac{1{,}50€}{0{,}5kg} = 3\frac{€}{kg}$ q ist der kg-Preis

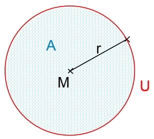
Masse in kg	0,5	1,2	4,3
Preis in €	1,50	3,60	12,90

3. a) nein, denn 20 Cent ist 1 Münze, 50 Cent auch
   b) je mehr Arbeiter, desto weniger Zeit
   also umgekehrte Proportionalität (wenn alle Arbeiter gleich arbeiten)
4. …auch vier Stunden!

Kreiszahl π = 3,14:

Kreisumfang:

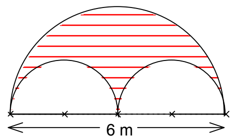
$U = 2\pi \cdot r$



Kreisflächeninhalt:

$A = \pi \cdot r^2$

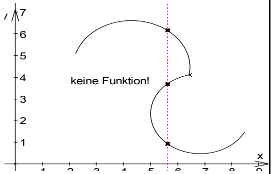
Berechne den Umfang und Flächeninhalt der schraffierten Fläche.



$U = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 3m + 2\pi \cdot 1{,}5m \approx 18{,}9m$

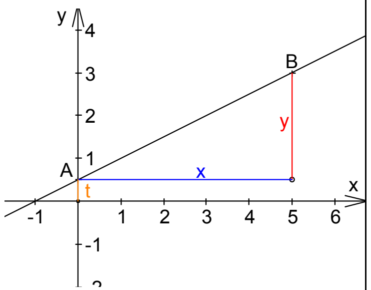
$A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (3m)^2 - \pi \cdot (1{,}5m)^2 \approx 7{,}1m^2$

Die **Funktion** *f: x ↦ y* ordnet jedem Wert für x *eindeutig* einen einzigen Wert für y zu.
(wenn jede Parallele zur y-Achse einen Graphen nur einmal schneidet, gehört dieser Graph zu einer Funktion)



lineare Funktionen: $\boxed{f: x \mapsto mx + t}$

- Graphen sind Geraden mit *Steigung m* und *y-Abschnitt t*
- Die x-Koordinate eines Schnittpunktes eines Graphen mit der x-Achse heißt **Nullstelle** der Funktion f. (f(x)=0)
- Proport. Zuordnung ist lineare Funktion mit t=0
- **Steigung:** $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$



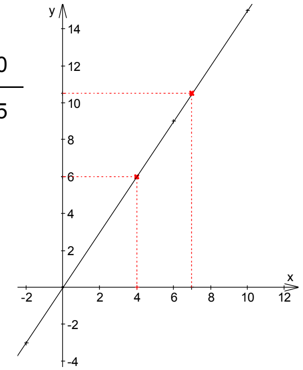
1. Welche Funktion gehört zur Wertetabelle? Gib eine Funktionsgleichung an. Ergänze die fehlenden Werte.

x	-2		6	7	10
y	-3	6	9		15

2. Prüfe, ob die Punkte P(5/-9) und Q(2,5/-3,5) zum Graphen der Funktion y +2x =1 gehören. (rechnerisch und graphisch!)
3. A((0,5/0,8) und B(1,5/0) liegen auf dem Graphen von f. Bestimme den Funktionsterm und die Schnittpunkte mit den Achsen.
4. Bestimme zum links abgebildeten Graphen die Funktionsvorschrift und die Nullstelle.

1. f(x) = 1,5x

x	-2	4	6	7	10
y	-3	6	9	10,5	15



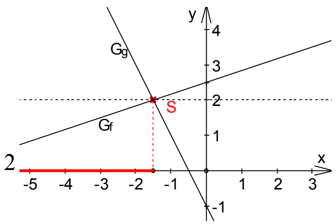
2. y = -2x+1
   f(5) = -10 + 1 = -9
   -> P ∈ G_f
   f(2,5) = -5 + 1 = -4 ≠ -3,5
   -> Q ∉ G_f
3. $m = \frac{0{,}8 - 0}{0{,}5 - 1{,}5} = -0{,}8$
   $y_B = -0{,}8 \cdot x_B + t \quad 0 = -0{,}8 \cdot 1{,}5 + t \quad t = 1{,}2$
   f(x) = y = -0,8x + 12
   Schnittpunkt mit x-Achse (Nullstelle, y=0):
   0 = -0,8x+1,2 N(1,5/0)
   Schnittpunkt mit y-Achse (x=0): y = 0+1,2 S(0/1,2)
4. $m = \frac{0{,}5 - 3}{0 - 5} = 0{,}5 \quad t = 0{,}5$ f: x ↦ 0,5x+0,5
   Nullstelle: 0,5x+0,5 = 0 -> x = -1

<u>Lösen linearer Gleichungen</u>
graphisch: Schnittpunkt zweier Geraden
rechnerisch: Äuqivalenzumformungen

<u>Lösen linearer Ungleichungen</u>: mit Hilfe der bekannten Äuqivalenzumformungen
Achtung: beim Multiplizieren/Dividieren mit negativen Zahlen dreht sich das Ungleichungszeichen um!

1. Bestimme den Schnittpunkt der Graphen von $f: x \mapsto \frac{1}{3}x + 2{,}5$ *und* $g: x \mapsto -2x - 1$ rechnerisch und graphisch.
2. Bestimme die Lösungsmenge graphisch: $\frac{1}{3}x + 2{,}5 < -2x - 1$
3. Bestimme x: $-3x + 3 > 2x + 13;$

1. $\frac{1}{3}x + 2{,}5 = -2x - 1;$
   $\frac{1}{3}x + 2x = -1 - 2{,}5;$
   $\frac{7}{3}x = -3{,}5; \qquad x = -1{,}5$
   $g(-1{,}5) = -2 \cdot (-1{,}5) - 1 = 2$
2. L={x/x<-1,5}
3. $-5x > 10; \qquad x < -2$



Zwei lineare Gleichungen mit zwei gemeinsamen Variablen bilden ein **lineares Gleichungs-system mit zwei Variablen**

- *graphische Lösung*: Schnittpunkt der beiden Graphen
- *rechnerische Lösung*: Einsetzungsverfahren oder Additionsverfahren

(I) 2x - 3y = 8
(II) -x + 0,5y = -1

Anton und Bert essen eine Pizza zusammen. Hätte Anton doppelt so viel und Bert nur halb so viel gegessen, dann hätten die beiden sogar 1,5 Pizzas verspeist. Welchen Anteil der Pizza haben die beiden jeweils gegessen?

x: Antons Anteil y: Berts Anteil
(I) x + y = 1
<u>(II) 2x + 0,5y = 1,5</u>
(-2I+II) - 1,5y = - 0,5; y = 1/3 x=2/3
oder:
(I)´ x = 1 – y in (II) 2·(1- y) + 0,5y = 1,5

Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt **Ergebnismenge Ω**. Jede Teilmenge A von Ω nennt man **Ereignis**.

z.B.: Werfen eines Würfels Ω={1;2;3;4;5;6}

A_1: gerade Augenzahl A_1={2;4;6}

A_2: Augenzahl >7 A_2={ } „***unmögliches Ereignis***“

A_3: Augenzahl positiv A_3= Ω „***sicheres Ereignis***“

A_4: ungerade Augenzahl ***Gegenereignis*** zu A_1: $A_4 = \overline{A_1}$

Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißen **Laplace-Experimente**.

Für die **Wahrscheinlichkeit P(A)** eines Ereignisses A gilt:

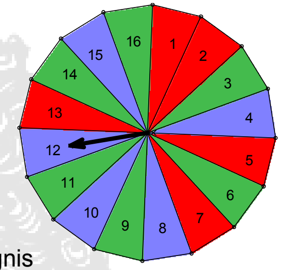
$$P(A) = \frac{Anzahl\ \ der\ \ günstigen\ \ Ergebnisse}{Anzahl\ \ aller\ \ möglichen\ \ Ergebnisse} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Es gilt: $0 \le P(A) \le 1 \qquad P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Zählprinzip: Zieht man aus k verschiedenen Mengen mit m_1, m_2,…m_k Elementen jeweils ein Element, so gibt es insgesamt $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ Möglichkeiten.

Zieht man n Objekte nacheinander aus einer Urne, so gibt es **n!**=n·(n-1)·…·2·1 („n Fakultät“) Möglichkeiten

1. In einer Urne sind 3 rote und eine blaue Kugel. Man zieht eine Kugel und achtet auf die Farbe. Warum ist es kein Laplace-Experiment?
2. Das Laplace-Glücksrad wird gedreht.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine „3“?
   b) Welche Wahrscheinlichkeit hat „Rot“?
   c) Wie lautet das Gegenereignis zu „Rot“?



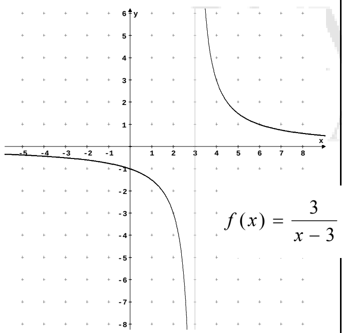
3. a) Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 2,4,6 und 8 bilden, wenn jede Zahl in jeder Zahl ganau einmal vorkommt ?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine ausgewählte Zahl mit 2 beginnt ?

1. P(„rot“) > P(„blau“), darum kein LP-Experiment
2. a) $P(3) = \frac{1}{16}$
   b) $P("rot") = \frac{5}{16}$
   c) $P("nicht\ \ rot") = P("blau\ \ oder\ \ grün") = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$
3. a) 4·3·2·1 = 4! = 24 Möglichkeiten
   b) $P("2...") = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{24} = \frac{1}{4}$

Terme, bei denen eine Variable im Nenner auftritt, heißen **Bruchterme** ($\frac{3}{x-3}$). Funktionen, deren Funktionsterm ein Bruchterm ist, nennt man **gebrochen-rationale Funktion** ($f(x) = \frac{3}{x-3}$)

Zahlen, für die der Nenner null wird, gehören nicht zur Definitionsmenge (*Definitionslücke*) (D=Q\{3}).

Eine Gerade, der sich der Graph beliebig genau annähert, nennt man eine **Asymptote** (x=3)



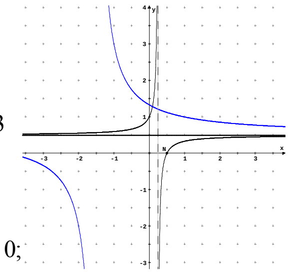
Bruchgleichungen lösen:

$$\frac{3}{x-3} = \frac{2}{x+1};$$
$$3(x+1) = 2(x-3)$$

Mit dem Hauptnenner multiplizieren liefert nennerfreie Gleichung!

1. Bestimme die Definitionsmenge und löse die Bruchgleichung $\frac{1}{2x-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2-x}$.
2. Addiert man zum Zähler und zum Nenner des Bruches $\frac{11}{15}$ jeweils dieselbe Zahl, so erhält man den Bruch $\frac{6}{7}$. Wie heißt diese Zahl?
3. Untersuche die Funktion $f: x \mapsto \frac{2x-1}{4x-1}$
   a) Bestimme die Definitionsmenge und Nullstellen.
   b) Bestimme die Asymptoten und skizziere G_f.
   c) Bestimme die Schnittpunkte des Graphen von f mit demjenigen der Funktion $g: x \mapsto \frac{2+0{,}5x}{x+1{,}5}$

1. D = Q\{2}
   $\frac{1}{2x-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2-x}; \quad /\cdot 2(x-2)$
   $1 = x - 2 + (-2);$ L={5}
2. gesuchte Zahl: x
   $\frac{11+x}{15+x} = \frac{6}{7}; \quad /\cdot 7(15+x)$
   $7 \cdot (11+x) = 6 \cdot (15+x);$
   $77 + 7x = 90 + 6x; \qquad x = 13$



3. a) D=Q\{0,25}
   $f(x) = 0 = \frac{2x-1}{4x-1}; \quad 2x-1 = 0;$
   $x = 0{,}5; \quad N(0{,}5/0)$
   b) f(1000)=0,5; f(-1000)=0,5 waagr.Asymp. y=0,5
   Def.lücke bei x=0,25 -> senkr. Asymp.

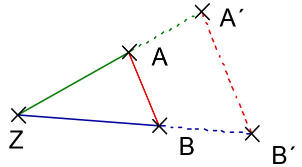
Für **Potenzen** mit **ganzzahligen Exponenten** und gleicher Basis gilt:

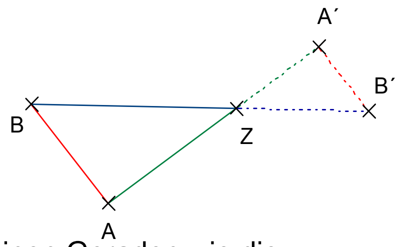
$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad a^p : a^q = a^{p-q} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

1. Vereinfache: $a^{-7} \cdot a^4 \qquad x^{-11} : x^{-5}$
2. Schreibe dezimal: $5{,}43 \cdot 10^3$

1. $a^{-7} \cdot a^4 = a^{-7+4} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; $x^{-11} : x^{-5} = x^{-11-(-5)} = x^{-6}$
2. $5{,}43 \cdot 10^3 = 5{,}43 \cdot 1000 = 5430$

Strahlensatz:
Werden zwei Geraden, die sich in einem Punkt Z schneiden, von zwei Parallelen (außerhalb von Z) geschnitten, so verhalten sich





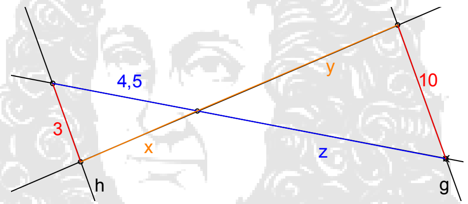
1. je zwei Abschnitte auf der einen Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden.

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} \qquad \frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

2. die Abschnitte auf den Parallelen wie die von Z aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf der einen Geraden (bzw. auf der anderen Geraden).

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$$

Die Geraden g und h sind parallel. Berechne die Längen der Strecken x, y und z, wenn bekannt ist,
dass x + y = 13.



$$\frac{x}{y} = \frac{3}{10}$$ Mit x+y=13 folgt: y=13-x

und somit:

$$\frac{x}{13-x} = \frac{3}{10}; \quad |\cdot 10\cdot(13-x)$$

$$10x = 3(13-x)$$

$$13x = 39$$

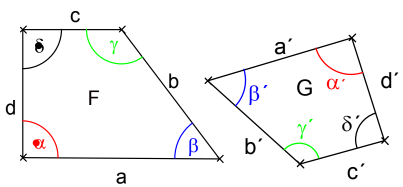
x = 3; y = 10

$$\frac{z}{4{,}5} = \frac{10}{3}$$ z = 15

Ähnlichkeit von Figuren:
Figuren F und G nennt man zueinander **ähnlich** (F~G), wenn man Figur F durch eine zentrische Streckung auf eine zu G kongruente Figur abbilden kann. Es gilt dann:

- entsprechende Strecken haben das gleich Längenverhältnis
- entsprechende Winkel sind gleich groß
- sind die Seitenlängen der Figur G k-mal so lang wie die von F, so ist der Flächeninhalt von G k^2-mal so groß wie der von F.

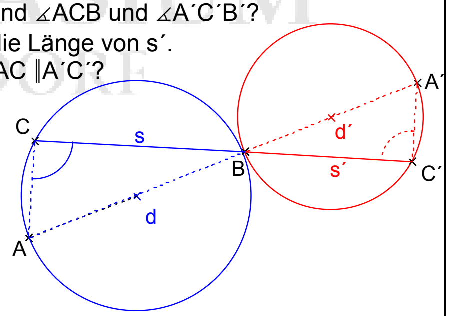
Längen: a´:a = b´:b =…= k
Winkel: α=α´; β=β´ …
Flächeninhalt: $A_G=k^2\cdot A_F$



Ähnlichkeitssätze für Dreiecke:
Dreiecke sind ähnlich, wenn sie …

- in zwei Winkeln übereinstimmen
- im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen.

1. Die Kreise haben die Durchmesser d =3cm und d´=2,4cm. Die Sehne s ist 2cm lang.
   a) Wie groß sind ∡ACB und ∡A´C´B´?
   b) Berechne die Länge von s´.
   c) Warum ist AC ∥A´C´?



2. Ist ein Dreieck mit den Seitenlängen 3 cm, 4 cm und 5 cm zu einem Dreieck mit den Seitenlängen 4,5 cm, 7,5 cm und 6 cm ähnlich ?

1. a) Thaleskreis über [AB]: ∡ACB= 90° = ∡A´C´B´
   b) ∡CBA =∡C´BA´ ((Scheitelwinkel)
   somit sind die Dreiecke ähnlich
   Also gilt: $\frac{s'}{s} = \frac{d'}{d}, d.h. \quad \frac{s'}{2cm} = \frac{2{,}4cm}{3cm}$
   $s' = 1{,}6cm$
   c) ∡ACB= 90° = ∡A´C´B´ sind gleich große Wechselwinkel, also ist AC ∥A´C´

2. Seitenverhältnisse entsprechender Seiten:
   $\frac{4{,}5}{3} = \frac{6}{4} = \frac{7{,}5}{5} = \frac{3}{2}$ sind gleich, also sind die Dreieck ähnlich.