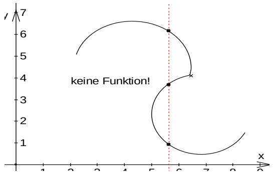
Grundwissen 8. Klasse G9

Die **Funktion** *f: x ↦ y* ordnet jedem Wert für x *eindeutig* einen einzigen Wert für y zu.
(wenn jede Parallele zur y-Achse einen Graphen nur einmal schneidet, gehört dieser Graph zu einer Funktion)

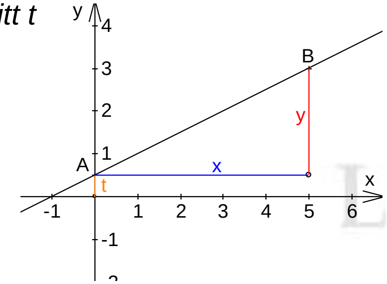


Funktionsvorschrift: x ↦ f(x)
Funktionsterm: f(x)
Funktionsgleichung: y = f(x)

Die **Definitionsmenge D** einer Funktion gibt vor, welche Zahlen in einen Funktionsterm eingesetzt werden dürfen, die Menge aller Funktionswerte y heißt **Wertemenge W**.

lineare Funktionen: $\boxed{f: x \mapsto mx + t}$

- Graphen sind Geraden mit *Steigung m* und *y-Achsenabschnitt t*
- Die x-Koordinate eines Schnittpunktes eines Graphen mit der x-Achse heißt **Nullstelle** der Funktion f. (f(x)=0)
- Proport. Zuordnung ist lineare Funktion mit t=0
- **Steigung:** $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$
  (m>0: Gerade steigt, m<0: Gerade fällt)



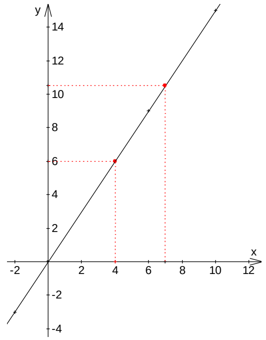
1. Bestimme die Funktion, die zur Wertetabelle gehört und gib eine Funktionsgleichung an. Ergänze die fehlenden Werte.

x	-2		6	7	10
y	-3	6	9		15

2. Prüfe, ob die Punkte P(5/-9) und Q(2,5/-3,5) zum Graphen der Funktion y +2x =1 gehören. (rechnerisch und graphisch!)
3. A((0,5/0,8) und B(1,5/0) liegen auf dem Graphen von f. Bestimme den Funktionsterm und die Schnittpunkte mit den Achsen.
4. Bestimme zum links abgebildeten Graphen die Funktionsvorschrift und die Nullstelle.

1. f(x) = 1,5x

x	-2	4	6	7	10
Y	-3	6	9	10,5	15



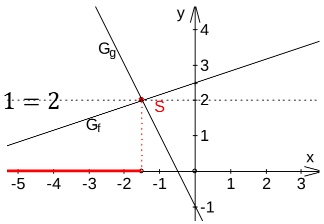
2. y = -2x+1
   f(5) = -10 + 1 = -9
   -> P∈G_f
   f(2,5) = -5 + 1 = -4 ≠ -3,5
   -> Q ∉G_f
3. $m = \frac{0{,}8-0}{0{,}5-1{,}5} = -0{,}8$
   $y_B = -0{,}8 \cdot x_B + t \quad 0 = -0{,}8 \cdot 1{,}5 + t \quad t = 1{,}2$
   f(x) = y = -0,8x + 1,2
   Schnittpunkt mit x-Achse (Nullstelle, y=0):
   0 = -0,8x+1,2 N(1,5/0)
   Schnittpunkt mit y-Achse (x=0): y = 0+1,2 S(0/1,2)
4. $m = \frac{0{,}5-3}{0-5} = 0{,}5 \quad t = 0{,}5$ f: x ↦ 0,5x+0,5
   Nullstelle: 0,5x+0,5 = 0 -> x = -1

<u>Lösen linearer Gleichungen</u>
graphisch: Schnittpunkt zweier Geraden
rechnerisch: Äquivalenzumformungen

<u>Lösen linearer Ungleichungen</u>: mit Hilfe der bekannten Äquivalenzumformungen
Achtung: beim Multiplizieren/Dividieren mit negativen Zahlen dreht sich das Ungleichungszeichen um!

1. Bestimme den Schnittpunkt der Graphen von
   $f: x \mapsto \frac{1}{3}x + 2{,}5 \quad und \quad g: x \mapsto -2x - 1$
   rechnerisch und graphisch.
2. Bestimme die Lösungsmenge graphisch:
   $\frac{1}{3}x + 2{,}5 < -2x - 1$
3. Bestimme die Lösung der Ungleichung
   $-3x + 3 < 2x + 13$

1. $f(x) = g(x)$
   $\frac{1}{3}x + 2{,}5 = -2x - 1$;
   $\frac{1}{3}x + 2x = -1 - 2{,}5$;
   $\frac{7}{3}x = -3{,}5$; $x = -1{,}5$
   $g(-1{,}5) = -2 \cdot (-1{,}5) - 1 = 2$
2. $L = \{x | x < -1{,}5\}$
3. $-5x < 10$; $x < -2$



Wissen / Können	Aufgaben und Beispiele	Lösungen

Wissen / Können

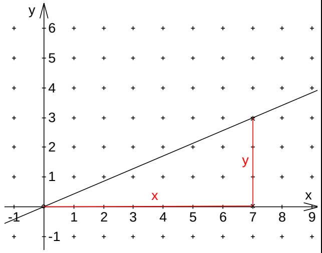
Gehört bei einer Zuordnung x ↦ y zum *r-fachen* der einen Größe das *r-fache* der anderen Größe, so handelt es sich um eine **direkte Proportionalität.**

Quotientengleichheit: $\frac{y}{x} = q$ ist konstant

q heißt *Proportionalitätsfaktor*

Funktionsvorschrift: $\boxed{f\colon x \mapsto q\cdot x}$

Graph: Ursprungsgerade



Aufgaben und Beispiele

1. Begründe, welche Zuordnungen direkt proportional sind.
   a) *Anzahl der Blätter ↦ Höhe des Stapels*
   b) *Seitenlänge des Quadrats ↦ Flächeninhalt*

2. Die Tabelle gehört zu einer proportionalen Zuordnung. Bestimme den Proportionalitätsfaktor und erkläre seine Bedeutung. Gib die Zuordnungsvorschrift an und ergänze die fehlenden Werte.

Masse in kg	0,5		1,2	4,3
Preis in €	1,50			

Lösungen

1. a) k-mal so viele Blätter ↦ k-mal so hoch
   also: Proportionalität
   b) $A_{Quadrat} = s^2$
   k-fache Seitenlänge ↦ k^2-facher Flächeninhalt
   also: keine Proportionalität

2. $\frac{y}{x} = q = \frac{1{,}50€}{0{,}5kg} = 3\frac{€}{kg}$ q ist der kg-Preis

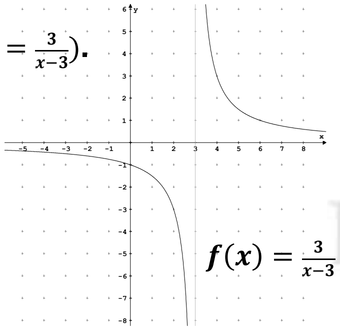
Masse in kg	0,5	1,2	4,3
Preis in €	1,50	3,60	12,90

Wissen / Können

Terme, bei denen eine Variable im Nenner auftritt, heißen **Bruchterme** ($\frac{3}{x-3}$). Funktionen, deren Funktionsterm ein Bruchterm ist, nennt man **gebrochen-rationale Funktion** ($f(x) = \frac{3}{x-3}$).

Zahlen, für die der Nenner Null wird, gehören nicht zur Definitionsmenge (*Definitionslücke*) (D=Q\{3}).

Eine Gerade, der sich der Graph beliebig genau annähert, nennt man eine **Asymptote** (x=3)



Aufgaben und Beispiele

1. Bestimme die Definitionsmenge und löse die Bruchgleichung $\frac{1}{2x-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2-x}$.

2. Addiert man zum Zähler und zum Nenner des Bruches $\frac{11}{15}$ jeweils dieselbe Zahl, so erhält man den Bruch $\frac{6}{7}$. Berechne diese Zahl.

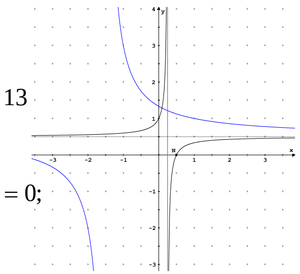
3. Untersuche die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{2x-1}{4x-1}$
   a) Bestimme die Definitionsmenge und Nullstellen.
   b) Bestimme die Asymptoten und skizziere G_f.
   c) Bestimme die Schnittpunkte des Graphen von f mit demjenigen der Funktion $g\colon x \mapsto \frac{2+0{,}5x}{x+1{,}5}$

Lösungen

1. D = Q\{2}
   $\frac{1}{x-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2-x}$ | $\cdot\ 2\cdot(x-2)$
   $1 = x-2+(-2)$; L={5}

2. gesuchte Zahl: x
   $\frac{11+x}{15+x} = \frac{6}{7}$; $/\cdot 7(15+x)$
   $7\cdot(11+x) = 6\cdot(15+x)$;
   $77+7x = 90+6x$; $x = 13$

3. a) D=Q\{0,25}
   $f(x) = 0 = \frac{2x-1}{4x-1}$; $2x-1=0$;
   $x = 0{,}5$; $N(0{,}5/0)$



   b) f(1000)=0,5; f(-1000)=0,5 waagr.Asymp. y=0,5
   Def.lücke bei x=0,25 -> senkr. Asymp.

Wissen / Können

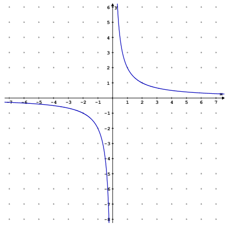
Die **umgekehrt proportionale Zuordnung** x ↦ y ordnet dem *r-fachen* der einen Größe den *r*-ten *Teil* der anderen Größe zu.

Produktgleichheit: $x\cdot y = p$ ist konstant

Funktionsvorschrift: $f\colon x \mapsto \frac{p}{x}$

Definitionsmenge: D=Q\{0}

Graph: Hyperbel



Aufgaben und Beispiele

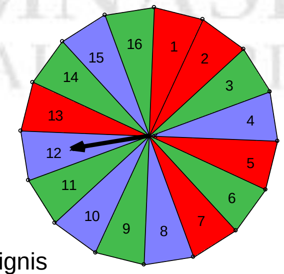
1. Gib an, welche Zuordnungen umgekehrt proportional sind und begründe jeweils deine Antwort.
   a) *Geldbetrag ↦ Anzahl der benötigten Münzen*
   b) *Anzahl der Arbeiter ↦ benötigte Zeit*

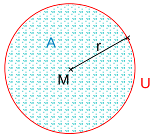
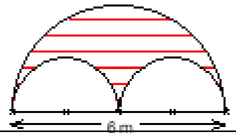
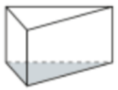
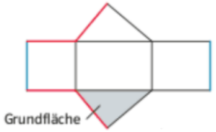
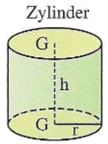
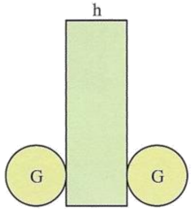
2. Mit 10 Kamelen kann man 500l Wasser transportieren und braucht 4 Stunden zur Oase. Ermittle, wie lange man mit 6 Kamelen braucht.

Lösungen

1. a) nein, denn 20 Cent ist 1 Münze, 50 Cent auch
   b) je mehr Arbeiter, desto weniger Zeit
   also umgekehrte Proportionalität (wenn alle Arbeiter gleich arbeiten)

…auch vier Stunden!

Rechnen mit Bruchtermen: man geht wie beim Rechnen mit Brüchen vor. **Bruchgleichungen lösen**: $\frac{3}{x-3}=\frac{2}{x+1}$; $3(x+1)=2(x-3)$ Mit dem Hauptnenner multiplizieren liefert nennerfreie Gleichung!	Auflösen von Formeln: $P=\frac{W}{t}$ Löse nach W und nach t auf.	$P=\frac{W}{t}\ \mid\cdot t$ $P\cdot t=W\ \mid :P$ $t=\frac{W}{P}$
Potenzgesetze: Für **Potenzen** mit **ganzzahligen Exponenten** und a, b $\neq 0$ gilt: (1) bei gleicher Basis: $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$ $a^r:a^s=a^{r-s}$ (2) bei gleichem Exponenten: $a^r\cdot b^r=(a\cdot b)^r$ $a^r:b^r=(a:b)^r$ (3) bei Potenzen einer Potenz: $(a^r)^s=a^{r\cdot s}$ Zudem gilt: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\left(\frac{b}{a}\right)^{1}=\frac{b}{a}$ bzw. $a^{-1}=\left(\frac{1}{a}\right)^{1}=\frac{1}{a}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-q}=\left(\frac{b}{a}\right)^{q}$ bzw. $a^{-p}=\left(\frac{1}{a}\right)^{p}=\frac{1}{a^p}$	1. Vereinfache: $a^{-7}\cdot a^{4}$ $x^{-11}:x^{-5}$ 2. Schreibe dezimal: $5{,}43\cdot 10^3$ 3. Berechne: 8^{-2}	1. $a^{-7}\cdot a^{4}=a^{-7+4}=a^{-3}=\frac{1}{a^3}$; $x^{-11}:x^{-5}=x^{-11-(-5)}=x^{-6}$ 2. $5{,}43\cdot 10^3=5{,}43\cdot 1000=5430$ 3. . $8^{-2}=\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{8^2}=\frac{1}{64}$
Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt **Ergebnismenge Ω**. Jede Teilmenge A von Ω nennt man **Ereignis**. *z.B.:* Werfen eines Würfels $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$ A_1: gerade Augenzahl $A_1=\{2;4;6\}$ A_2: Augenzahl >7 $A_2=\{\ \}$ „***unmögliches Ereignis***“ A_3: Augenzahl positiv $A_3=\Omega$ „***sicheres Ereignis***“ A_4: ungerade Augenzahl ***Gegenereignis*** zu A_1: $A_4=\overline{A_1}$ Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißen **Laplace-Experimente**. Für die **Wahrscheinlichkeit P(A)** eines Ereignisses A gilt: $P(A)=\frac{Anzahl\ \ der\ \ günstigen\ \ Ergebnisse}{Anzahl\ \ aller\ \ möglichen\ \ Ergebnisse}=\frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert}$ Es gilt: $0\le P(A)\le 1$ $P(A)+P(\overline{A})=1$ **Zählprinzip**: Zieht man aus k verschiedenen Mengen mit m_1, $m_2,\ldots m_k$ Elementen jeweils ein Element, so gibt es insgesamt $m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_k$ Möglichkeiten. Zieht man n Objekte nacheinander aus einer Urne, so gibt es **n!**$=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ („n Fakultät“) Möglichkeiten	1. In einer Urne sind 3 rote und eine blaue Kugel. Man zieht eine Kugel und achtet auf die Farbe. Erkläre, warum dies kein Laplace-Experiment ist. 2. Das Laplace-Glücksrad wird gedreht. a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für eine „3“. b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit von „Rot“? c) Gib an, wie das Gegenereignis zu „Rot“ lautet.  3. a) Ermittle, wie viele verschiedene vierstellige Zahlen sich aus den Ziffern 2,4,6 und 8 bilden lassen, wenn jede Zahl in jeder Zahl ganau einmal vorkommt. b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine ausgewählte Zahl mit 2 beginnt.	1. P(„rot“) > P(„blau“), darum kein LP-Experiment 2. a) $P(3)=\frac{1}{16}$ b) $P(\text{"rot"})=\frac{5}{16}$ c) $P(\text{"nicht rot"})=P(\text{"blau oder grün}=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$ 3. a) $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!=24$ Möglichkeiten b) $P(\text{"2...\"})=\frac{1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{24}=\frac{1}{4}$

Zwei lineare Gleichungen mit zwei gemeinsamen Variablen bilden ein **lineares Gleichungs-system mit zwei Variablen** - *graphische Lösung*: Schnittpunkt der beiden Graphen - *rechnerische Lösung*: Einsetzungsverfahren oder Additionsverfahren (I) $2x - 3y = 8$ (II) $-x + 0,5y = -1$	Anton und Bert essen eine Pizza zusammen. Hätte Anton doppelt so viel und Bert nur halb so viel gegessen, dann hätten die beiden sogar 1,5 Pizzas verspeist. Bestimme den Anteil der Pizza, den die beiden jeweils gegessen haben.	x: Antons Anteil y: Berts Anteil (I) $x + y = 1$ (II) $2x + 0,5y = 1,5$ (-2I+II) $-1,5y = -0,5$; $y = 1/3$ $x=2/3$ oder: (I)´ $x = 1 - y$ in (II) $2\cdot(1-y) + 0,5y = 1,5$
Kreiszahl $\pi \approx 3,14$: Kreisumfang: $U = 2\pi \cdot r$  Kreisflächeninhalt: $A = \pi \cdot r^2$	Berechne den Umfang und Flächeninhalt der schraffierten Fläche. 	$U = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 3m + 2\pi \cdot 1,5m \approx 18,9m$ $A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (3m)^2 - \pi \cdot (1,5m)^2 \approx 7,1m^2$
Volumen- und Oberflächenformeln: Prisma: $V = G \cdot h$ $O = 2G + M$   Zylinder: $V = r^2\pi \cdot h$ $M = 2r\pi \cdot h$ $O = 2\,r^2\pi + 2r\pi \cdot h$  	Berechne Volumen und Oberfläche eines Prismas mit Höhe h = 12,5 cm, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge a = 6 cm ist !	Grundfläche: $G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$ mit $h_a \approx 5,2$ cm G = 12 · 6 cm · 5,2 cm ≈ 15,6 cm² Volumen: $V = G \cdot h = 15,6\,cm^2 \cdot 12,5\,cm = 187,2\,cm^3$ Oberfläche: $O = 2G + M = 2G + 3 \cdot a \cdot h$ $= 2 \cdot 15,6\,cm^2 + 3 \cdot 6\,cm \cdot 12,5\,cm$ $= 256,2\,cm^3$