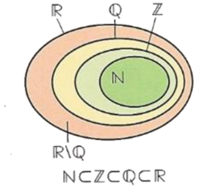
## WISSEN / KÖNNEN

**I Reelle Zahlen**

Die **Quadratwurzel** (kurz: Wurzel) einer Zahl a ($a \geq 0$) ist diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat a ergibt. **Schreibweise $\sqrt{a}$.**

Viele Quadratwurzel $\sqrt{a}$ sind keine **rationalen** Zahlen (mit endlicher oder unendlich periodischer Dezimalbruchdarstellung), sondern **irrationale** Zahlen mit unendlichen, nicht periodischen Dezimalbruchdarstellungen.

Die Mengen der rationalen und der irrationalen Zahlen ergeben zusammen die Menge der **reellen** Zahlen $\mathbb{R}$.




**Rechenregeln für Quadratwurzeln:**

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ für alle a ≥ 0

**aber:** $\sqrt{\boldsymbol{a^2}} = |\boldsymbol{a}|$ für alle a ∈ R

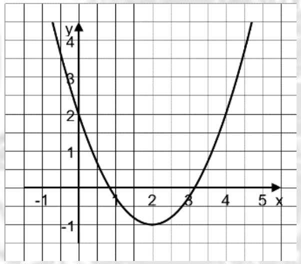
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ und $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ mit $b \neq 0$, für alle $a, b \geq 0$

**Binomische Formeln:**

*„Plusformel“* $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
*„Minusformel“* $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
*„Plus-Minus-Formel“* $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**Rationalmachen des Nenners:** Nenner enthält …
… eine Wurzel ⇒ Erweitere mit der gleichen Wurzel
… eine Summe/Differenz von Wurzeln ⇒ Erweitere m. Hilfe der 3.BiFo

| AUFGABEN / BEISPIELE | LÖSUNGEN |
|---|---|
| **1. Rationale oder irrationale Zahl?**<br>**a)** $\sqrt{7}$<br>**b)** $5,\overline{36}$<br>**c)** $\sqrt{3{,}24}$<br>**d)** 1,21122111222… | **a)** irrational, da 7 keine Quadratzahl ist<br>**b)** rational, da $5,\overline{36} = 5\frac{36}{99}$<br>**c)** rational, da $\ldots = 1{,}8$<br>**d)** irrational, da nicht periodisch |
| **2. Berechne.**<br>**a)** $\sqrt{(-6)^2}$<br>**b)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{72}$<br>**c)** $\sqrt{48} : \sqrt{3}$<br>**d)** $\sqrt{9 + 16}$ | **a)** $\ldots = \lvert -6 \rvert = 6$<br>**b)** $\ldots = \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 36} = 6\sqrt{6}$<br>**c)** $\ldots = \sqrt{16} = 4$<br>**d)** $\ldots = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$ |
| **3. Berechne.**<br>**a)** $(3x + 5y)^2$<br>**b)** $\left(1{,}5a - \frac{2}{3}b\right)^2$<br>**c)** $\left(\sqrt{2}u + \sqrt{18}v^3\right)\left(\sqrt{2}u - \sqrt{18}v^3\right)$<br>**d)** $\sqrt{a^2 - 8a + 16}$ | **a)** $\ldots = 9x^2 + 30xy + 25y^2$<br>**b)** $\ldots = 2{,}25a^2 - 2ab + \frac{4}{9}b^2$<br>**c)** $\ldots = 2u^2 - 18v^6$<br>**d)** $\ldots = \lvert a - 4 \rvert$ |
| **4. Mache den Nenner rational.**<br>**a)** $\frac{12}{\sqrt{6}}$<br>**b)** $\frac{8}{5+\sqrt{3}}$ | **a)** $\ldots = \frac{12\sqrt{6}}{6}$<br>**b)** $\ldots = \frac{8(5-\sqrt{3})}{25-3} = \frac{4(5-\sqrt{3})}{11}$ |

| WISSEN / KÖNNEN | AUFGABEN / BEISPIELE | LÖSUNGEN |
|---|---|---|
| **<u>II Quadratische Funktionen und Gleichungen</u>**<br><br>Funktionen der Form $\boldsymbol{f: x \mapsto ax^2 + bx + c}$ heißen **quadratische Funktionen.**<br><br>Ihre **Graphen** $G_f$ heißen **Parabeln.**<br>Der **Graph** der Funktion g mit $g\ (x) = \boldsymbol{x^2}$ heißt **Normalparabel**.<br><br>$G_f$ ist für $a > 0$ **nach oben geöffnet**,<br>$a < 0$ **nach unten geöffnet**;<br><br>für $\|a\| > 1$ **enger als die Normalparabel**,<br>$\|a\| < 1$ **weiter als die Normalparabel**.<br><br>**Scheitel:** tiefster (a > 0) bzw. höchster (a < 0) Punkt von $G_f$<br><br>**<u>Sonderfälle:</u>**<br><br>$f\ (x) = x^2 + e$ ⇒ $G_f$ ist eine um e Einheiten **in y – Richtung verschobene** Normalparabel; **S (0 \| e)**<br><br>$f\ (x) = (x - d)^2$ ⇒ $G_f$ ist eine um d Einheiten **in x – Richtung verschobene** Normalparabel; **S (d \| 0)**<br><br>**<u>Darstellungsformen:</u>**<br>Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad (0\|c)\ auf\ G_f$<br>Scheitelpunktform: $f(x) = a(x + d)^2 + e$ $\quad S(-d\|e)$<br>Nullstellenform: $f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$ $\quad Nullstellen: x_1\ und\ x_2$<br><br>Mit Hilfe der **quadratischen Ergänzung** gelangt man von der allgemeinen Form zur Scheitelpunktform. (vgl. Aufgabe 1).<br><br>**<u>Lösungsformel für quadratische Gleichungen</u>**<br>**Quadrat. Gleichung:** $ax^2 + bx + c = 0$<br>**Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$<br><br>$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$<br>$D > 0$: 2 Lösungen (Nullstellen)<br>$D = 0$: 1 Lösung (Nullstelle) → Scheitel liegt auf x-Achse<br>$D < 0$: 0 Lösungen (Nullstellen) | **1. Beschreibe den Graphen zu f möglichst genau, ohne ihn zu zeichnen.**<br>$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 12x + 4}$ | Scheitel mit Hilfe quadrat. Ergänzung:<br>$f(x) = 2(x^2 - 6x + 2) =$<br>$= 2(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 + 2) =$<br>$= 2[(x - 3)^2 - 9 + 2] = 2(x - 3)^2 - 14$<br>$\Rightarrow S(3\|-14)$<br><br>$a = 2: G_f$ nach oben geöffnet, da $a > 0$, enger als die NP, da $\|a\| > 1$<br><br>$\mathbb{W} = [-14; +\infty[$<br><br>f hat zwei Nullstellen, da S unterhalb der x-Achse liegt und die Parabel nach oben geöffnet ist. |
| | **2. Bestimme den Funktionsterm des Graphen.**<br> | $S(2\|-1)$ und $P(4\|2)$ ablesen und in Scheitelpunktform einsetzen:<br>1) $y = a \cdot (x - 2)^2 - 1$<br>2) $2 = a \cdot (4 - 2)^2 - 1$<br>$2 = 4a - 1$<br>3) $\Rightarrow a = \frac{3}{4}$<br>4) $\Rightarrow f(x) = \frac{3}{4}(x - 2)^2 - 1$ |
| | **3. Löse die Gleichungen.**<br><br>**a)** $4x^2 - 32 = 0$<br>**b)** $5x^2 = 2x$<br>**c)** $3x^2 - 2x = 2x + 4$ | a) $\ldots 4x^2 = 32$<br>$x^2 = 8$<br>$x_{1/2} = \pm\sqrt{8}$<br>b) $\ldots 5x^2 - 2x = 0$<br>$x(5x - 2) = 0$ (Nullstellenform)<br>$x_1 = 0\ und\ x_2 = \frac{2}{5}$<br>c) $\ldots 3x^2 - 4x - 4 = 0$ (MF)<br><br>$x_{1,2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3}$<br>$= \frac{4 \pm \sqrt{64}}{6} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -\frac{2}{3}$ |

<table>
<tr><th>WISSEN / KÖNNEN</th><th>AUFGABEN / BEISPIELE</th><th>LÖSUNGEN</th></tr>
<tr>
<td rowspan="3">
<u>III Quadratische Funktionen in Anwendung</u><br><br>
Bestimmen des Funktionsterms<br>
Fall 1: drei Punkte $\in G_f$ gegeben<br><br>
Lösung: $f(x) = ax^2 + bx + c$ liefert ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen um a, b und c zu bestimmen.<br>
1. Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen<br>
2. Diese durch Einsetzen in den anderen beiden Gleichungen eliminieren<br>
3. Einsetz-/Additionsverfahren anwenden<br><br>
Fall 2: S und P gegeben → Scheitelpunktform verwenden<br>
Fall 3: Zwei Nullstellen gegeben → Nullstellenform verwenden<br><br>
Extremwertprobleme:<br><br>
Führt die Suche nach dem Extremwert einer Größe auf eine quadratische Funktion, so liefert die $y$ – Koordinate des Scheitels von $G_f$ diesen Extremwert. (vgl. Aufgabe 2)<br><br>
Schnittpunkte (SP) von Funktionsgraphen berechnen:<br><br>
1. Funktionsterme gleichsetzen<br>
2. jede Lösung dieser Gleichung liefert x – Koordinate eines SP<br>
3. $y$ – Koordinate eines SP erhält man durch Einsetzen der $x$ – Koordinate in eine der beiden Funktionsgleichungen
</td>
<td>1. Bestimme den Funktionsterm der quadratischen Funktion $f$, deren Graph $G_f$ durch die Punkte $A\ (1|0), B\ (2|-1)$ und $C\ (3|2)$ verläuft.</td>
<td>
$Setze\ jeweils\ die\ Punkte\ A, B\ und\ C\ in\ die\ allgemeine\ Form\ y = ax^2 + bx + c\ ein:$<br>
$(I)\ 0 = a + b + c$<br>
$(II) - 1 = 4a + 2b + c$<br>
$(III)\ 2 = 9a + 3b + c$<br><br>
$(I)\ nach\ a\ und\ in\ (II) und\ (III)$<br>
$a = -b - c$<br>
$(II)^* - 1 = 4(-b - c) + 2b + c$<br>
$-1 = -2b - 3c \quad (II)^{**}$<br>
$(III)^*\ 2 = 9(-b - c) + 3b + c$<br>
$2 = -6b - 8c \quad (III)^{**}$<br>
$LGS\ mit\ (II)^{**}\ und\ (III)^{**}\ lösen: ...$<br>
$b = 14; c = -9$<br>
$in\ (I) einsetzen\ und\ nach\ a\ auflösen$<br>
$\Rightarrow a = -5$<br>
$\Rightarrow f(x) = -5x^2 + 14b - 9$
</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Mit einem Zaun der Länge $800\ m$ soll eine möglichst große rechteckige Fläche eingezäunt werden. Welche Maße hat die Fläche?</td>
<td>
a: Länge; b: Breite<br>
Nebenbedingung: $U = 2a + 2b = 800$<br>
$\Rightarrow a = 400 - b$<br>
Wert der extrem werden soll: $A = a \cdot b$<br>
$A = (400 - b) \cdot b = -b^2 + 400b =$<br>
$= quadrat. Ergänzung =$<br>
$= (b - 200)^2 + 40000$<br>
$\Rightarrow S(200|40000)$<br>
A: Für $b = a = 200m$ wird die Fläche mit $40000m^2$ maximal.
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Berechne die Schnittpunkte der Graphen der beiden Funktionen $f$ und $g$ mit $f(x) = -x + 3{,}5$ und $g(x) = \frac{x+1}{2x-2}$.</td>
<td>
1. $-x + 3{,}5 = \frac{x+1}{2x-2}$<br>
2. $x + 1 = (-x + 3{,}5)(2x - 2)$<br>
$x + 1 = -2x^2 + 2x + 7x - 7$<br>
$2x^2 - 8x + 8 = 0$<br>
$2(x^2 - 4x + 4) = 0$<br>
$2(x - 2)^2 = 0$ (oder Lösungsformel)<br>
$x_{1,2} = 2$<br><br>
3. Schnittpunkt $S(2|1{,}5)$
</td>
</tr>
</table>

| WISSEN / KÖNNEN | AUFGABEN / BEISPIELE | LÖSUNGEN |
|---|---|---|

## IV Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse

### WISSEN / KÖNNEN

**Vierfeldertafel:** Liefert Übersicht über absolute bzw. relative Häufigkeiten zweier Ereignisse A und B sowie deren Verknüpfungen.

| | $B$ | $\bar{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $H(A \cap B)$ | $H(A \cap \bar{B})$ | $H(A)$ |
| $\bar{A}$ | $H(\bar{A} \cap B)$ | $H(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $H(\bar{A})$ |
| | $H(B)$ | $H(\bar{B})$ | $n$ |

| | $B$ | $\bar{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $P(A \cap B)$ | $P(A \cap \bar{B})$ | $P(A)$ |
| $\bar{A}$ | $P(\bar{A} \cap B)$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $P(\bar{A})$ |
| | $P(B)$ | $P(\bar{B})$ | $P(\Omega)$ |

**Zerlegung einer Ergebnismenge:** Die Schnittmengen $A \cap B, A \cap \bar{B},\ \bar{A} \cap B$ und $\bar{A} \cap \bar{B}$ bilden eine Zerlegung der Ergebnismenge $\Omega$. Das heißt: Jedes Ergebnis $\omega \in \Omega$ gehört genau einer dieser Teilmengen an.

Für die **Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge $A \cup B$** gilt:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

### AUFGABEN / BEISPIELE

1. Das AEG hat 1200 SchülerInnen. 30% von ihnen engagieren sich in der SMV. 65% der Aktiven sind Mädchen. Von der Schülergruppe, die sich nicht engagiert, sind 45% Mädchen.
   a) Erstelle eine Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten.
   b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person männlich und in der SMV ist.

2. Jonas stellt eine Fotocollage aus 40 Bildern zusammen. Er hat Freunde auf 20 Bildern fotografiert. Auf 12 Fotos sind Sonnenuntergänge zu sehen; auf zwei dieser Sonnenuntergangsfotos sind Freunde abgebildet. Betrachtet werden die Ereignisse: S: „Das Foto zeigt einen Sonnenuntergang." und F: „Auf dem Foto sind Freunde zu sehen."
   a) Bestimme $P(S \cap \bar{F})\ und\ P(\bar{S})$.
   b) Bestimme $P(S \cup F)$.

### LÖSUNGEN

1. a)

| | Mädchen | Jungen | |
|---|---|---|---|
| $SMV$ | $0{,}65 \cdot 360 =$ **234** | 126 | $0{,}3 \cdot 1200 =$ **360** |
| $\overline{SMV}$ | $0{,}45 \cdot 840 =$ **378** | 462 | $1200 - 360 =$ **840** |
| | 612 | 588 | **1200** |

b) $P(Junge \cap SMV) = \frac{126}{1200} =$
$= 0{,}105 = 10{,}5\%$

2.

| | $F$ | $\bar{F}$ | |
|---|---|---|---|
| $S$ | **2** | 10 | **12** |
| $\bar{S}$ | 18 | 10 | 28 |
| | **20** | 20 | **40** |

a) $P(S \cap \bar{F}) = \frac{10}{40} = 25\%$
$P(\bar{S}) = \frac{28}{40} = 70\%$

b) $P(S \cup F) = P(S) + P(F) - P(S \cap F) =$
$= \frac{12}{40} + \frac{20}{40} - \frac{2}{40} = 75\%$

| WISSEN / KÖNNEN | AUFGABEN / BEISPIELE | LÖSUNGEN |
|---|---|---|

## V Ähnlichkeit und Strahlensatz

### WISSEN / KÖNNEN

Zwei Figuren heißen **ähnlich** zueinander, wenn man sie durch maßstäbliches Vergrößern bzw. Verkleinern auf zueinander kongruente Figuren abbilden kann.

**Ähnlichkeitsfaktor k:** Streckungsfaktor, mit dem alle Strecken multipliziert werden.

**Eigenschaften ähnlicher Figuren:**
Entsprechende Winkel sind gleich groß und entsprechende Strecken haben stets das gleiche Längenverhältnis.

### AUFGABEN / BEISPIELE

1. Begründe, dass die Rechtecke ABCD ($l = 16cm, b = 6cm$) und A'B'C'D ($l' = 6{,}4cm, b' = 2{,}4cm$) ähnlich sind und bestimme den Ähnlichkeitsfaktor.

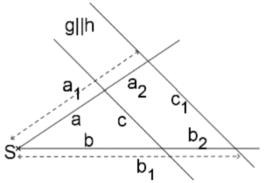
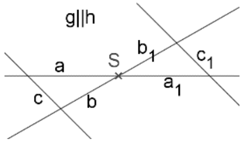
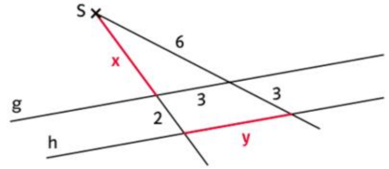
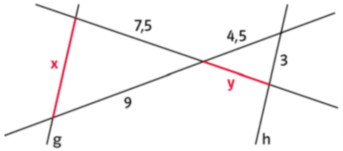
2. Die Flächeninhalte $A\ und\ A'$ zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie $49{:}16$; ihre Umfänge $U\ und\ U'$ unterscheiden sich um 18cm. Berechne die Umfänge der beiden Dreiecke.

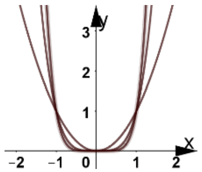
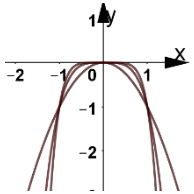
### LÖSUNGEN

1. Ähnlich, weil sie beide vier rechte Winkel haben UND die Verhältnisse der sich entsprechenden Seitenlängen übereinstimmen.

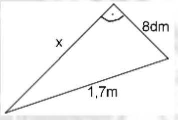
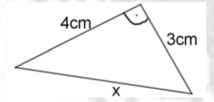
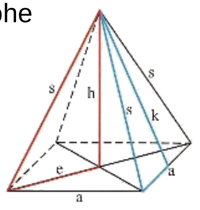
$$\boldsymbol{k} = \frac{l}{l'} = \frac{16cm}{6{,}4cm} = \boldsymbol{2{,}5} = \frac{6cm}{2{,}4cm} = \frac{b}{b'}$$

2.
$k^2 \cdot A = A' \Rightarrow k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{49}{16} \Rightarrow k = \frac{7}{4}$
$a + b + c = a' + b' + c' - 18cm$
$a + b + c = \frac{7}{4}(a + b + c) - 18cm$
$18cm = \frac{3}{4}(a + b + c)$
$24cm = a + b + c = U$
$\Rightarrow U' = 24cm + 18cm = 42cm$

| | | |
|---|---|---|
| **Ähnlichkeitssätze für Dreiecke**<br>Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn …<br>**WW-Satz:** … sie in zwei Winkeln übereinstimmen<br>**S:S:S-Satz:** … sie im Verhältnis entsprechender Seitenlängen übereinstimmen.<br>$Streckenlänge_{ähnliche\ Figur} = k \cdot Streckenlänge_{Originalfigur}$<br>$Flächeninhalt_{ähnliche\ Figur} = k^2 \cdot Flächeninhalt_{Originalfigur}$<br>$Volumen_{ähnliche\ Figur} = k^3 \cdot Volumen_{Originalfigur}$<br>**Strahlensatz V-Figur**<br>$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$; $\frac{a_2}{a} = \frac{b_2}{b}$; $\frac{c_1}{c} = \frac{a_1}{a}$; $\frac{c_1}{c} = \frac{b_1}{b}$<br><br><br>**Strahlensatz X-Figur**<br>$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$; $\frac{c_1}{c} = \frac{a_1}{a}$; $\frac{c_1}{c} = \frac{b_1}{b}$<br><br> | 3. Die Geraden g und h sind parallel. Berechne die fehlenden Streckenlängen x und y.<br><br><br><br> | **V-Figur:**<br>$\frac{x}{x+2} = \frac{6}{6+3} \Rightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 2x + 4$<br>$\Rightarrow x = 4$<br>$\frac{6}{3} = \frac{6+3}{y} \Rightarrow 2 = \frac{9}{y} \Rightarrow y = 4{,}5$<br>**X-Figur:**<br>$\frac{x}{9} = \frac{3}{4{,}5} \Rightarrow x = 6$<br>$\frac{y}{7{,}5} = \frac{4{,}5}{9} \Rightarrow y = 3{,}75$ |

| WISSEN / KÖNNEN | AUFGABEN / BEISPIELE | LÖSUNGEN |
|---|---|---|
| **<u>VI Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten und n-te</u>** Wurzel<br><br>**Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten**<br>Eine Funktion $\boldsymbol{f: x \mapsto a \cdot x^n}$ $(\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ heißt **Potenzfunktion**. Der Exponent n gibt den **Grad der Potenzfunktion** an.<br><br><br>**<u>n gerade:</u>**<br>• Achsensymmetrisch zur y-Achse<br>**charakteristischer Verlauf & Monotonieverha.**<br>• $\boldsymbol{a > 0}$: von links oben nach rechts oben; $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$<br>Fällt bis $x < 0$; steigt ab $x > 0$<br><br><br>• $\boldsymbol{a < 0}$: von links unten nach rechts unten; $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^-$<br>Steigt bis $x < 0$; fällt ab $x > 0$ | 1. Gib an, ob der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist und beschreibe den charakteristischen Verlauf des Graphen.<br>a) $f(x) = 0{,}2x^8$<br>b) $g(x) = -4x^3$<br>c) $h(x) = -0{,}9x^4$<br>d) $i(x) = 6x^5$ | a) Achsensymm. zur y-A. ; von links oben nach rechts oben<br>b) Punktsymm. zum Ursprung; von links oben nach rechts unten<br>c) Achsensymm. zur y-Achse; von links unten nach rechts unten<br>d) Punktsymm. zum Ursprung; von links unten nach rechts oben |
| | 2. Berechne ohne Taschenrechner.<br>a) $\sqrt[3]{64}$<br>b) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$<br>c) $\sqrt[3]{125}$<br>d) $\sqrt[4]{0{,}0001}$ | a) ... $= \sqrt[3]{4 \cdot 4 \cdot 4} = 4$<br>b) ... $= \sqrt[6]{\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}} = \frac{1}{2}$<br>c) ... $= \sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5$<br>d) ... $= \sqrt[4]{0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1} = 0{,}1$ |

| | | |
|---|---|---|
| Die **n-te Wurzel einer Zahl a** ($a \geq 0$) ist diejenige **nicht negative** Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. **Schreibweise:** $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.<br>**Achtung:** $\sqrt[3]{\boldsymbol{-8}}$ **existiert nicht, obwohl** $(-2)^3 = \boldsymbol{-8}$ **ist!**<br>**Die Gleichung** $\boldsymbol{x^3 = -8}$ **hat demnach die Lösung** $\boldsymbol{x = -\sqrt{\lvert -8 \rvert} = -8}$.<br><br>**Potenzen mit rationalen Exponenten:**<br>Für $a > 0, z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\ n \geq 2$ gilt: $\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ & $\boldsymbol{a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z}}$ & $\boldsymbol{a^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^z}}}$<br><br>**Potenzgesetze:**<br>Für $a, b > 0\ und\ r, s \in \mathbb{Q}$ gilt: **Potenzen mit …**<br><br>(1) **… gleicher Basis:** $a^r \cdot a^s = a^{r+s}\quad bzw.\quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$<br><br>(2) … **gleichem Exponenten:** $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r\quad bzw.\quad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$<br><br>(3) **Potenz einer Potenz:** $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ | 3. Vereinfache so weit wie möglich.<br>$(a, t, x, y > 0)$<br>a) $\left(\sqrt{y^{-4}}\right)^2$<br>b) $\frac{\sqrt[3]{a^4}}{a}$<br>c) $\left(\sqrt[n]{t^3}\right)^{2n}$<br>d) $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{a^{15}}}}$ | a) $\ldots = \left(y^{-\frac{4}{2}}\right)^2 = y^{-\frac{4}{2} \cdot 2} = y^{-4} = \frac{1}{y^4}$<br>b) $\ldots = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^1} = a^{\frac{4}{3}-1} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$<br>c) $\ldots = \left(t^{\frac{3}{n}}\right)^{2n} = t^{\frac{3}{n} \cdot 2n} = t^6$<br>d) $\ldots = \left(\left((a^{15})^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = a^{15 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ |

| WISSEN / KÖNNEN | AUFGABEN / BEISPIELE | LÖSUNGEN |
|---|---|---|
| **VII Satz des Pythagoras**<br><br>**Satz des Pythagoras:**<br>In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt es Quadrates über der Hypotenuse.<br>Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$<br><br>**Kehrsatz zum Satz des Pythagoras:**<br>Wenn für die Seiten a, b und c eines Dreiecks die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel.<br><br>**Berechnungen an Figuren und Körpern:**<br>Diagonale im Rechteck: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$<br>im Quadrat: $d = a\sqrt{2}$<br>Raumdiagonale im Quader: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$<br>im Würfel: $d = a\sqrt{3}$<br>Höhe im gleichseitigen Dreieck: $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$<br>Fläche … : $A = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ | 1. Berechne die fehlende Seitenlänge.<br>a) <br>b)  | a) $x^2 + (8dm)^2 = (17dm)^2$<br>$x = \sqrt{289dm^2 - 64dm^2} = 15dm$<br>b) $(4cm)^2 + (3cm)^2 = x^2$<br>$x = \sqrt{16cm^2 + 9cm^2} = 5cm$ |
| | 2. Ist das Dreieck BGH rechtwinklig?<br>$b = 4cm, g = 6cm, h = 7cm$ | Die längste Seite müsste die Hypotenuse sein: $h^2 = (7cm)^2 = 49cm^2$<br>$b^2 + g^2 = 16cm^2 + 36cm^2 = 52cm^2 \neq h^2$<br>Das Dreieck ist nicht rechtwinklig. |
| | 3. Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit $a = b = c = 12cm$. | $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12cm \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 12cm \cdot \sqrt{3}\right) =$<br>$= 36\sqrt{3}cm^2$ |
| | 4. Berechne die Seitenlänge eines Quadrats mit Diagonale $d = 12\ cm$. | $d = a\sqrt{2} = 12cm \ \Rightarrow a = 6\sqrt{2}cm$ |
| | 5. Berechne die Pyramidenhöhe h und die Höhe k der Seitenfläche für eine quadratische Pyramide mit den Kantenlängen $a = 20\ cm$ und $s = 25\ cm$.  | $h^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = s^2 \Rightarrow h^2 = s^2 - \left(\frac{1}{2}d\right)^2$<br>$h = \sqrt{(25cm)^2 - \left(10\sqrt{2}cm\right)^2} = 5\sqrt{17}cm$<br>$k^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 \Rightarrow k = \sqrt{(25cm)^2 - (10cm)^2}$<br>$= 5\sqrt{21}cm$ |

| WISSEN / KÖNNEN | AUFGABEN / BEISPIELE | LÖSUNGEN |
|---|---|---|

## WISSEN / KÖNNEN

**<u>VIII Trigonometrie</u>**

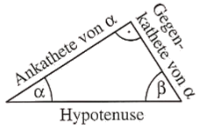
Definition:

Für die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck legt man fest:

$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$

$\cos\alpha = \frac{Ankathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$

$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$




**Besondere Werte von Sinus, Kosinus und Tangens:**

| φ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| sin φ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |
| cos φ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tan φ | 0 | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | Nicht definiert |

**Beziehungen zw. Sinus, Kosinus, Tangens: 0°≤ φ ≤ 90°**

(1) $\sin\varphi = cos\,(90° - \varphi)$ ; $\cos\varphi = sin\,(90° - \varphi)$

(2) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

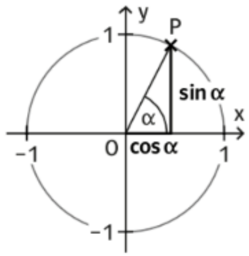
(3) $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\quad mit\ \varphi \neq 90°$

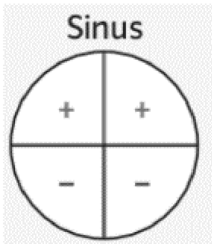
**Sinus & Kosinus am Einheitskreis**

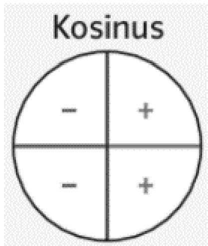
Ist P(x|y) ein Punkt auf dem Einheitskreis und α der Winkel zwischen 0° und 360° mit der positiven x-Achse als erstem und der Strecke $\overline{OP}$ als zweitem Schenkel, so legt man fest:

$$\boldsymbol{P(\cos\alpha\,|\,\sin\alpha)}$$

Die Vorzeichen von cos und sin sind dem Schema zu entnehmen.



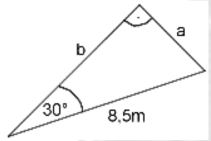



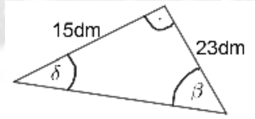

## AUFGABEN / BEISPIELE

1. Berechne $a, b, \delta\ und\ \beta$.

a)




b)




2. Vereinfache so weit wie möglich.

$\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\tan^2\alpha - 1} + 1$

3. Bestimme die beiden zwischen 0° und 360° liegenden Winkel mit

a) $\cos\alpha = 0{,}5$

b) $\sin\alpha = -0{,}5\sqrt{2}$

## LÖSUNGEN

1.

a) $\sin 30° = \frac{a}{8{,}5m} \Rightarrow a = 8{,}5m \cdot sin\ 30° = 4{,}25m$

$\cos 30° = \frac{b}{8{,}5m} \Rightarrow b = 8{,}5m \cdot \cos 30° = \frac{17\sqrt{3}}{4}m$

b) $\tan\delta = \frac{23dm}{15dm} \Rightarrow \delta = \tan^{-1}\frac{23}{15} \approx 56{,}9°$

$\tan\beta = \frac{15dm}{23dm} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\frac{15}{23} \approx 33{,}1°$

2.

$\ldots = \frac{\cos^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} - \frac{\sin^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} + 1 =$

$= \frac{\cos^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} + 1 =$

$= \frac{\cos^2\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} + 1 =$

$= -\cos^2\alpha + 1 =$

$= 1 - \cos^2\alpha =$

$= \sin^2\alpha$

3.

a) 1. Winkel: $\alpha_1 = 60°$

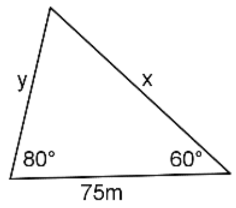
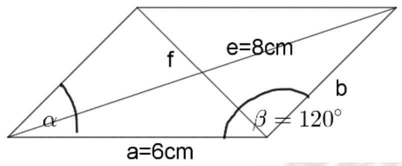
2. Winkel befindet sich im IV. Quadranten wegen $+0{,}5\ (positiv)$

$\Rightarrow \alpha_2 = 360° - 60° = 300°$

b) 1. Winkel $\alpha_1 = 315°$ (TR liefert $-45°$. D.h. man muss 45° von den 360° subtrahieren)

2. Winkel befindet sich im III. Quadranten wegen $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (negativ)

$\Rightarrow \alpha_2 = 180° + 45° = 225°$

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Zu jedem Sinus- und Kosinuswert gehören im Allgemeinen <u>zwei Winkel</u>. Der <u>TR liefert jedoch nur einen</u>. Der andere Winkel muss selbst bestimmt werden.<br><br><u>Sinussatz</u><br>In jedem Dreieck ABC gilt:<br>$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$; $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$; $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$<br><br><u>Kosinussatz (verallgemeinerter Satz des Pythagoras)</u><br>In jedem Dreieck ABC gilt:<br>$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$<br>$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$<br>$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$</td>
<td>4. Berechne die Streckenlängen x und y.<br></td>
<td>$\frac{\sin 80°}{\sin 40°} = \frac{x}{75m} \Rightarrow x = 75m \cdot \frac{\sin 80°}{\sin 40°} \approx 114{,}9m$<br><br>$\frac{\sin 60°}{\sin 40°} = \frac{y}{75m} \Rightarrow 75m \cdot \frac{\sin 60°}{\sin 40°} \approx 101{,}0°$</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Berechne die fehlenden Größen $\alpha$ und $b$ des Parallelogramms. $e\ und\ f$ sind die Diagonalen.<br></td>
<td>$\alpha = 180° - \beta = 60°\ (Nachbarwinkel)$<br><br>$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$<br>$8^2 = 6^2 + b^2 - 2 \cdot 6 \cdot \cos 120°$<br>$64 = 36 + b^2 + 6b$<br>$0 = b^2 + 6b - 28$<br>$b_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+4 \cdot 28}}{2} = -3 \pm \sqrt{37}$<br>$b = \left(-3 + \sqrt{37}\,\right)m \approx 3{,}08m$<br>(negative Lösung mach keinen Sinn, da b eine Länge ist)</td>
</tr>
</table>