Lösungen zu den Ferienübungen für die 10. Klasse (G9)

1. I) $5 = b \cdot a^{-2}$ II) $20 = b \cdot a^2$

$$\frac{II}{I} \rightarrow \frac{20}{5} = \frac{ba^2}{ba^{-2}} \;=>\; 4 = a^4 \;=>\; a = 4^{\frac{1}{4}} = 2^{2\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$$

a in II): $20 = b \cdot 2\,;\quad b = 10$ $\qquad f(x) = 10 \cdot \sqrt{2}^x$

2. G_g ist im Vgl. zu G_f an der x-Achse gespiegelt und um 1 nach oben verschoben
➔ $g(x) = -f(x) + 1 = -0{,}5^x + 1$
G_h ist im Vgl. zu G_f um 0,5 nach links verschoben
➔ $h(x) = f(x + 0{,}5) = 0{,}5^{x+0{,}5} = \sqrt{0{,}5} \cdot 0{,}5^x$

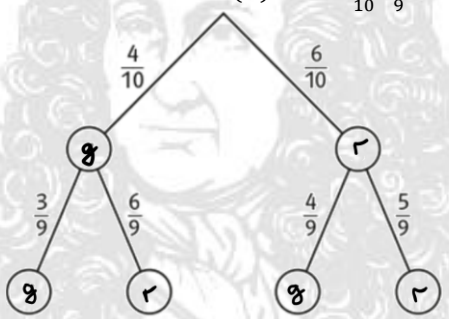
3. a) $\log_{\sqrt{a}}(\sqrt[3]{a^4}) = \log_{\sqrt{a}}\left(a^{\frac{4}{3}}\right) = x \;=>\; \sqrt{a}^x = a^{\frac{4}{3}} \;=>\; \frac{x}{2} = \frac{4}{3} \;=>\; x = \frac{8}{3}$
b) $\lg\left(\frac{1}{a}\right)^2 + lga^3 - lga = \lg\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot a^3 : a\right] = lg1 = \log_{10} 1 = 0$

ODER: $2\lg\left(\frac{1}{a}\right) + 3\lg(a) - lga = -2lga + 2lga = 0$

4. a) $\frac{5^x}{20^x} = 12 \;=>\; \left(\frac{1}{4}\right)^x = 12 \;=>\; x = \log_{\frac{1}{4}} 12 \approx -1{,}792$
b) $\frac{9}{4} \cdot 4^x = 3^2 \cdot \frac{2^x}{3^x} \;=>\; 4^x \cdot 3^x \cdot 2^{-x} = 4 \;=>\; 2^x \cdot 3^x = 4 \;=>\; 6^x = 4;\quad x = \log_6(4) \approx 0{,}774$

5. a) $f(x) = b \cdot a^x \qquad b = 1; a = 1 - 40\,\% = 0{,}6 \;=>\; f(x) = 0{,}6^x$
b) $f(5) = 0{,}6^5 = 0{,}078$ Die Beleuchtungsstärke hat sich um ca. 92,2 % reduziert.
c) $f(x) = 0{,}5 \;=>\; 0{,}5 = 0{,}6^x \qquad x = \log_{0{,}6} 0{,}5 = lg0{,}5 : lg0{,}6 = 1{,}36$ Tiefe: 1,36 m

6. $P(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{15} \approx 53{,}3\,\%$ $\qquad P(B) = 1 - \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = 1 - \frac{30}{90} = \frac{2}{3} \approx 66{,}7\,\%$



7. a) Man ordnet z. B. Nico Wappen und Jana Zahl zu und wirft die Münze. Sieger ist die Person, deren Merkmal oben liegt.
b) Man ordnet z. B. Nico alle ungeraden Zahlen auf dem Würfel zu und Jana alle geraden Zahlen. Wessen Augenzahl oben liegt, ist Sieger der Runde.
c) Auszug aus dem Tabellenkalkulationsprogramm:

	A	B	C	D
1	Runden	Sieger ist	Spielstand	Spielstand
2	Nummer	0: Jana 1: Nico	Jana	Nico
3				
4	1	1	0	1
5	2	0	1	1
6	3	0	2	1
7	4	1	2	2

Eingabe in Zelle B4: =ZUFALLSBEREICH(0;1)

Eingabe in Zelle C4: =WENN(B4=0;C3+1;C3)

Eingabe in Zelle D4: =WENN(B4=1;D3+1;D3)

8. a) $x = \frac{135°}{360°} \cdot 2\pi = \frac{3}{4}\pi$ $\qquad$ b) $\varphi = \frac{11\pi}{16 \cdot 2\pi} \cdot 360° = 123{,}75°$ $\qquad$ c) $\varphi = \frac{2{,}8}{2\pi} \cdot 360° \approx 160{,}4°$

9. a) $sin225° = \sin(180° + 45°) = -sin45° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $\cos(-420°) = \cos(-420° + 2 \cdot 360°) = cos300° = \cos(360° - 60°) = cos60° = 0{,}5$

10. a) $sin\varphi = 0{,}1234 \;=>\; \sin^{-1}(0{,}1234) = 7{,}1° \;=>\; \varphi_1 = 7{,}1°;\quad \varphi_2 = 180° - 7{,}1° = 172{,}9°$
    b) $\cos\varphi = -0{,}4321 \;=>\; \cos^{-1}(0{,}4321) = 64{,}4° \;=>\; \varphi_2 = 180° - 64{,}4° = 115{,}6°,\;\; \varphi_3 = 180° + 64{,}4° = 244{,}4°$

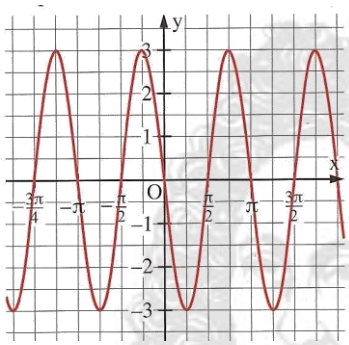
11. a) $x \in \{-135°; -45°; 225°; 315°\}, \quad x \in \left\{-\frac{3}{4}\pi;\ -\frac{1}{4}\pi;\ \frac{5}{4}\pi;\ \frac{7}{4}\pi\right\}$
    b) $x \in \{-300°; -60°; 60°; 300°\}, \quad x \in \left\{\pm\frac{5}{3}\pi;\ \pm\frac{1}{3}\pi\right\}$

12. $f(x) = a \cdot \sin\left(b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right) + d$

    Amplitude: $a = 2{,}5$ Periode: $\frac{2\pi}{b} = \pi \;=>\; b = 2$
    Verschiebung: $\frac{1}{3}\pi$ nach rechts, also: $\frac{c}{b} = -\frac{1}{3}\pi$ bzw. $c = -\frac{2}{3}\pi$

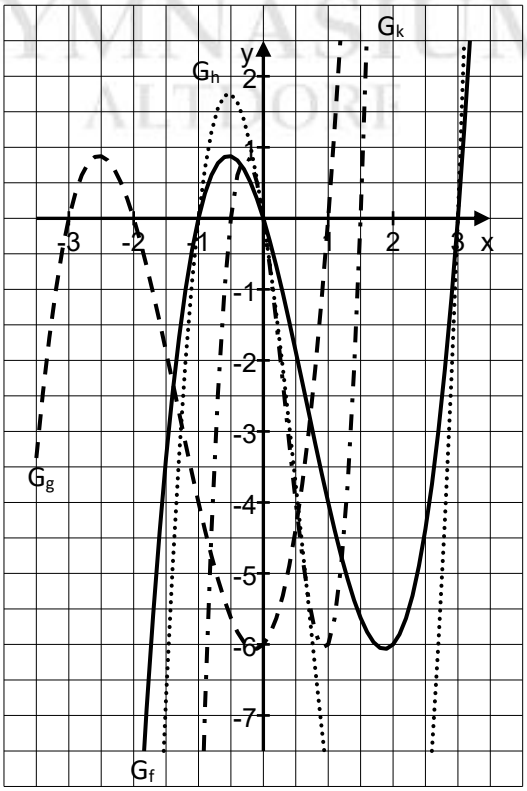
$$d = 0 \;=>\; f(x) = 2{,}5 \cdot \sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$$

13. Amplitude: 3 Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts, 0 nach oben
    Nullstellen: … $-\pi;\ -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2};\ \pi;$ …



14. a) x = 2 (dreifach), x = -3 (einfach)
    b) In der Umgebung der Nullstelle x = 2 verläuft der Graph flacher als in der Umgebung der Nullstelle x = -3.

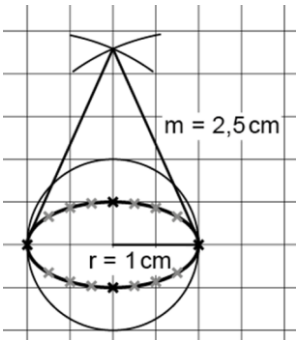
15. a) $f(x) = x(x^2 - 2x - 3)$ $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 3$ (Mitternachtsformel)
    b) G_g ist im Vergleich zu G_f um 2 Einheiten nach links verschoben. Nst.: $x_1 = -2,\ x_2 = -3, x_3 = 1$
    G_h ist im Vergleich mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt. Nst.: $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 3$
    G_k ist im Vergleich mit dem Faktor 0,5 in x-Richtung gestreckt, Nst.: $x_1 = 0, x_2 = -0{,}5, x_3 = 1{,}5$



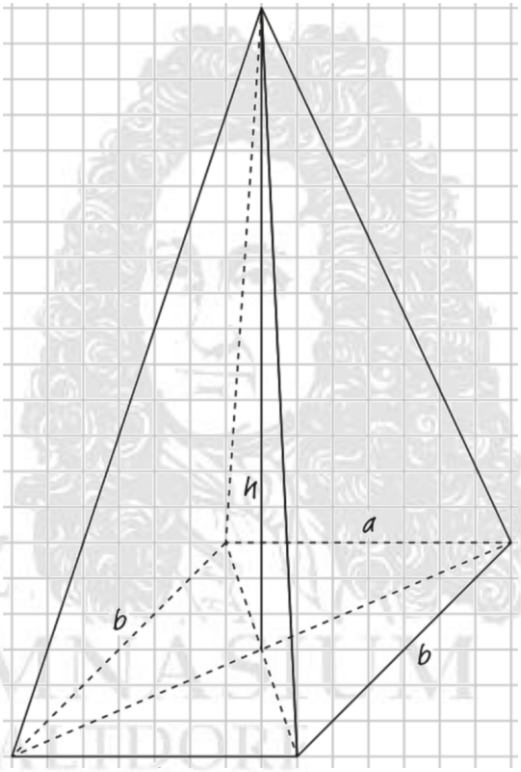
16. a) $f(x) = x^2 - 1,\ \ f(-x) = x^2 - 1 = f(x) \rightarrow$ Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Nst.: $x_1 = -1, x_2 = 1$
b) $g(-x) = \frac{-4x-3}{-2x+1} = \frac{4x+3}{2x-1}$ Der Graph weist keine Symmetrie auf! Nst.: $x_1 = \frac{3}{4}$
c) $h(-x) = 1{,}5^{-x} - 12 = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 12$ Der Graph weist keine Symmetrie auf. Nst.: $x = \log_{1,5} 12$
d) $k(-x) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -k(x)$ Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Nst.: $x = \frac{1}{2}k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$

17. $O_{Kugel} = 484\ cm^2 < O_{Zylinder} = 554\ cm^2 < O_{Würfel} = 600\ cm^2 < O_{Kegel} = 621\ cm^2$

18.



19.



20. a) $a^2 + a^2 = d^2$ b) $h_a = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2}$ c) $\sin(\alpha) = \frac{h}{s}$
d) $\tan(\beta) = \frac{h_a}{\frac{1}{2}a}$ e) $\cos(\gamma) = \frac{\frac{1}{2}a}{h_a}$ f) $\frac{\frac{d}{2}}{s} = cos\alpha$
g) $s^2 = \left(\frac{1}{2}d\right)^2 + h^2$ h) $h_a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$

21. a) $O_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot 4r^2\pi = 2r^2\pi,\ \ M_{Kegel} = r\pi \cdot \sqrt{r^2 + r^2} = r\pi\sqrt{2}r = \sqrt{2}r^2\pi$
$\frac{2r^2\pi - \sqrt{2}r^2\pi}{\sqrt{2}r^2\pi} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142$ => $O_{Halbkugel}$ ist circa um 41,4 % größer.
b) $V_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{2}{3}r^3\pi;\ \ V_{Kegel} = \frac{1}{3}r^2\pi r = \frac{1}{3}r^3\pi$ => $V_{Halbkugel}$ ist doppelt so groß wie V_{Kegel}, also um 100 % größer als V_{Kegel}.