# Lösungen zu den Ferienübungen für die 9. Klasse (G9)

1. a) $\sqrt{5}+\frac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}=\left(1+\frac{2}{5}\right)\sqrt{5}=1{,}4\sqrt{5}$ ; b) $\frac{2-\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}=\frac{(2-\sqrt{6})^2}{(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})}=\frac{4-4\sqrt{6}+6}{4-6}=\frac{10-4\sqrt{6}}{-2}=2\sqrt{6}-5$

   c) $\frac{r-144}{\sqrt{r}-12}=\frac{(\sqrt{r}-12)(\sqrt{r}+12)}{\sqrt{r}-12}=\sqrt{r}+12$ ; d) $\frac{a-2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}=\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}-1}=\sqrt{a}-1$

2. a) $\sqrt{0{,}01p^2-0{,}6pq+9q^2}=\sqrt{(0{,}1p-3q)^2}=|0{,}1p-3q|$ ; c) $\left(5^{-\frac{1}{8}}\right)^4=5^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

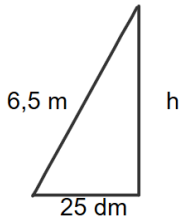
   b) $\sqrt{8r^4s^3}\cdot\sqrt{12r^3s^3}:\sqrt{4rs^2}=\sqrt{96r^7s^6:4rs^2}=\sqrt{24r^6s^4}=2\sqrt{6}r^3s^2$ ; d) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}:\sqrt[4]{3}=3^{-\frac{1}{3}}:3^{\frac{1}{4}}=3^{-\frac{7}{12}}$

3. Skizze

Satz des Pythagoras: $(25dm)^2+h^2=(6{,}5m)^2$

$h=\pm\sqrt{6{,}5^2m^2-2{,}5^2m^2}$

$Da\ h>0: h=6m,$




4. f (x) = 0,5x² – x + 0,75 = 0,5 [x² – 2x + 1,5] =
   = 0,5 [x² – 2x + 1 – 1 + 1,5] = 0,5 [ (x – 1)² + 0,5] =
   = 0,5 (x – 1)² + 0,25 ➔ S(1/0,25)

5. f(x) = a(x+2)² - 2 ; f(0) = 1 ➔ 4·a – 2 = 1 ➔ a = $\frac{3}{4}$ ➔ f(x) = $\frac{3}{4}(x+2)^2-2=\frac{3}{4}x^2+3x+1$

   g(x) = a(x–1)² + 3 ; g(-1) = -2 ➔ 4·a+3 = -2 ➔ a = $-\frac{5}{4}$ ➔ g(x) = $-\frac{5}{4}(x-1)^2+3=-\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{7}{4}$

   Schnitt: f(x) = g(x) ➔ $\frac{3}{4}(x+2)^2-2=-\frac{5}{4}(x-1)^2+3$ ➔ $3(x+2)^2-8=-5(x-1)^2+12$

   $3x^2+12x+4=-5x^2+10x+7$ ➔ $8x^2+2x-3=0$ ➔ $x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot8\cdot(-3)}}{2\cdot8}=\frac{-2\pm10}{16}$

   $S_1(-\frac{3}{4}/-\frac{53}{64})$ ; $S_2(\frac{1}{2}/\frac{43}{16})$

6. a) $\sqrt[4]{12x^2}=2$ ➔ 12x² = 2⁴ ➔ $x^2=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$ ➔ |x| = $\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ➔ $x_1=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ; $x_2=\frac{2}{3}\sqrt{3}$

   b) 6z² – 2z = 0 ➔ 2z (3z – 1) = 0 ➔ z₁ = 0 , z₂ = $\frac{1}{3}$

   c) 3y² – 8y – 3 = 0 ; $y_{1/2}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot3\cdot(-3)}}{2\cdot3}=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\frac{8\pm10}{6}$ ; $\mathbf{y_1}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$ ; $\mathbf{y_2}=\frac{18}{6}=3$

   d) x⁴ = 12 – x² ; x⁴ + x² – 12 = 0 ; <u>Substitution: x² = y</u>

   y² + y – 12 = 0 ; $y_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-12)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-1\pm7}{2}$

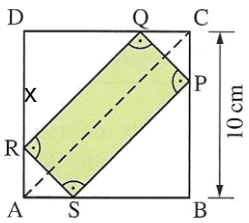
   y₁ = (–4) ➔ <u>Resubstitution</u>: x² = (–4) ***nicht def.***

   y₂ = 3 ➔ <u>Resubstitution</u>: x² = 3 ; **$x_1=-\sqrt{3}$ , $x_2=\sqrt{3}$**

7. Es gilt: x = $\overline{DR}=\overline{DQ}=\overline{BP}=\overline{BS}$

   A = $A_{Qu}$ – 2 $A_{\text{Dreieck groß}}$ – 2 $A_{\text{Dreieck klein}}$

   A (x) = 100 – 2·0,5·x² – 2·0,5·(10 – x)² = 100 – x² – (100 – 20x + x²) =
   = – 2x² + 20x = –2 [x² – 10x + 25 – 25] = –2 (x – 5)² + 50




   **S (5 | 50)** Den maximalen Flächeninhalt y = 50 cm² erhält man für x = 5 cm; das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt ist also ein Quadrat !

8. a) A (1 | 0) ∈ $G_f$ ➔ I) 0 = a·1² + b·1 + c = a + b + c
   B (2 | 1) ∈ $G_f$ ➔ II) 1 = a·2² + b·2 + c = 4a + 2b + c
   C (4 | –3) ∈ $G_f$ ➔ III) –3 = a·4² + b·4 + c = 16a + 4b + c

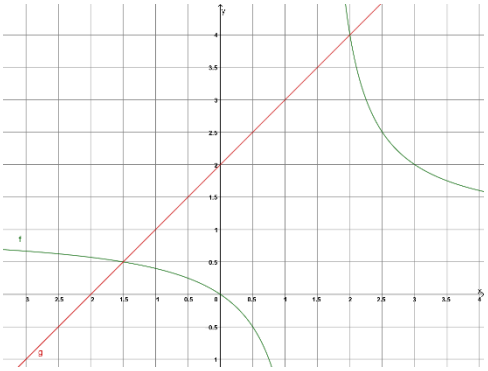
   Aus I) : c = –a – b ; in II): 1 = 3a + b (II')
   in III): –3 = 15a + 3b | :3
   –1 = 5a + b (III')

   III)' – II)' –2 = 2a **a = (–1)** *(Additionsverfahren)*

a in II)' $1 = 3\cdot(-1) + b$ **$b = 4$**
a, b in I)' $c = -(-1) - 4$ ; **$c = (-3)$** **$f(x) = -x^2 + 4x - 3$**

b) Nullstellen: $x_1 = -2$ ; $x_2 = 1$ => $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 2)(x - 1)$

$C(0 \mid 3) \in G_f$ => $3 = a(0 + 2)(0 - 1)$ ; $3 = -2a$ ; $a = -1{,}5$
➔ **$f(x) = -1{,}5(x + 2)(x - 1) = -1{,}5\cdot x^2 - 1{,}5\cdot x + 3$**



9. $\frac{2x}{2x-3} = x + 2$ ➔ $2x = (2x - 3)(x + 2)$ ➔ $2x = 2x^2 + x - 6$
➔ $0 = 2x^2 - x - 6$ ➔ $x_{1/2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot(-6)}}{2\cdot2} = \frac{1\pm\sqrt{49}}{4} = \frac{1\pm7}{4}$
$x_1 = 2, x_2 = -\frac{3}{2}$ *jeweils in g(x) einsetzen:* $g(2) = 4, g\left(-\frac{3}{2}\right) = 0{,}5$
$\boldsymbol{S_1(2|4)\ und\ S_2(-1{,}5|0{,}5)}$

10. a)

| | $E$ | $\bar{E}$ | |
|---|---|---|---|
| $S$ | 60 | 65 | 125 |
| $\bar{S}$ | 40 | 335 | 375 |
| | 100 | 400 | 500 |

| | $E$ | $\bar{E}$ | |
|---|---|---|---|
| $S$ | 12% | 13% | 25% |
| $\bar{S}$ | 8% | 67% | 75% |
| | 20% | 80% | 100% |

b) $\bar{S} \cap \bar{E}$: „Ein zufällig ausgewählter Befragter achtet weder auf seine Ernährung noch treibt er täglich Sport"
$H(\bar{S} \cap \bar{E}) = 335$

c) $P(S \cup E) = 8\% + 12\% + 13\% = 33\%$
Alternativ: $P(S \cup E) = P(S) + P(E) - P(S \cap E) = 25\% + 20\% - 12\% = 33\%$

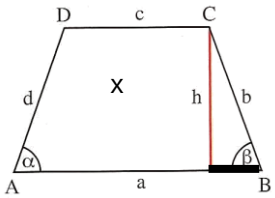
11. a) Die Schlussfolgerung ist falsch. Betrachten wir die Ereignisse eines geeigneten Zufallsexperiments:
A: „Eine zufällig ausgewählte Person leider unter Zöliakie (Glutenunverträglichkeit)"
B: „Eine zufällig ausgewählte Person verzehrt regelmäßig glutenhaltiges Getreide (z.B. Weizen)"

Damit gilt offensichtlich $A \cap B = \{\}$, da vermutlich keine Person unter Zöliakie leidet und trotzdem regelmäßig glutenhaltiges Getreide konsumiert. Aber es gibt Personen, die nicht unter Zöliakie leiden und trotzdem kein glutenhaltiges Getreide konsumieren, wenn sie beispielsweise eine bestimme Ernährungsform umsetzen (z.B. Paleo).
Deshalb gilt unter Verwendung dieses Beispiels $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \{\}$.

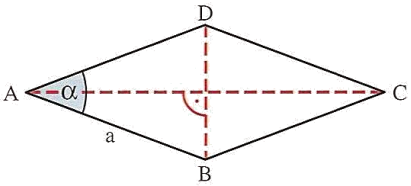
b) Die Aussage ist ebenfalls falsch. Im Gegensatz zum Beispiel bei a) kann auch $\bar{A} \cap \bar{B} = \{\}$ gelten.
Betrachten wir eine Vierfeldertafel mit den Ereignissen A und B (siehe Abbildung):
Bei den gewählten Werten gilt:
$A \cap B = \{\}$ und $\bar{A} \cap \bar{B} = \{\}$. Die Aussage ist somit ebenfalls widerlegt.
**Alternative:** $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, A = \{1; 2; 3\} und\ B = \{4; 5; 6\}$.
Schnittmenge der Gegenereignisse ist leer.

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0 | 50% | 50% |
| $\bar{B}$ | 50% | 0 | 50% |
| | 50% | 50% | 100% |

12. $\sin\beta = \frac{h}{b} \Rightarrow \beta = sin^{-1}\left(\frac{h}{b}\right) = sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41{,}8°$
$\tan\beta = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{tan\,\beta} \approx 5{,}6$ cm
$a = c + 2x \approx 15{,}7$ cm ; $d = b = \sqrt{h^2 + x^2} \approx 7{,}5$ cm ; $A = \frac{1}{2}(a + c)\cdot h \approx 50{,}5$ cm²

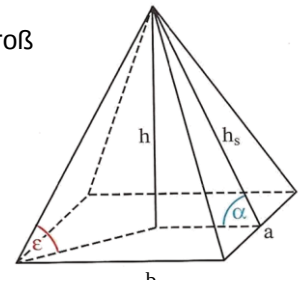



13. $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{0{,}5\overline{BD}}{a} = \frac{\overline{BD}}{2a} \Rightarrow \overline{BD} = 2a\cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx 5{,}2$ cm
$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{0{,}5\overline{AC}}{a} = \frac{\overline{AC}}{2a} \Rightarrow \overline{AC} = 2a\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx 6{,}9$ cm

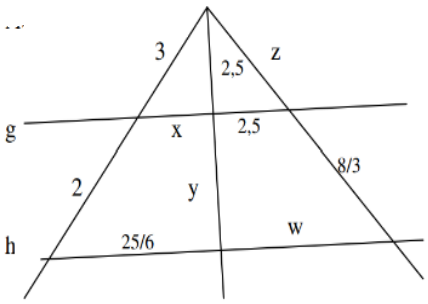



14. a) $\tan\varepsilon = \frac{h}{0{,}5\sqrt{a^2+b^2}}$ => $\varepsilon = \tan^{-1}\left(\frac{2h}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \approx 49{,}6°$ ;
b) $\tan\beta = \frac{h}{0{,}5b} = \frac{2h}{b}$ ➔ $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{2h}{b}\right)$ Z 53,1 ° ; $\tan\alpha = \frac{h}{0{,}5a} = \frac{2h}{a}$ => $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2h}{a}\right)$ Z 68,2 °

15. a) Die beiden Dreiecke stimmen in allen drei Winkel überein und sind somit nach dem WW-Satz ähnlich zueinander.
b) Die Dreiecke sind nicht ähnlich. Die Seitenlängen haben zwar den gleichen Ähnlichkeitsfaktor, allerdings müsste der Winkel zwischen den beiden Seiten gleich groß sein.




16. $x = 2{,}5$ (über V-Figur links)
$w = \frac{25}{6}$ (über V-Figur ganz groß)
$z = 4$ (über V-Figur rechts)
$y = \frac{5}{3}$ (über V-Figur rechts)




17. a) $\sin 178° = \sin(180° - 178°) = \sin\ 2° > 0$
b) $\cos 95° = -\cos(180° - 95°) = -\cos(85°) < 0$
c) $\cos 180° + \cos 360° = -1 + 1 = 0$

18.

$$\tan 45° = \frac{h}{20m + x} \Rightarrow h = (20m + x) \cdot tan45° \quad (I)$$

$$tan65° = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{tan65°} \quad (II)$$

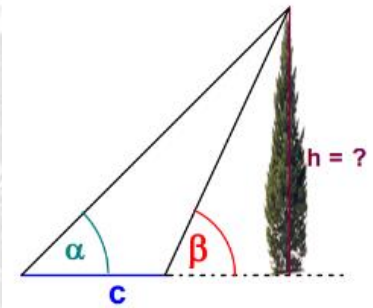
$$(II)\ in\ (I): h = \left(20m + \frac{h}{tan65°}\right) \cdot tan45°$$

$$h = 20m \cdot tan45° + \frac{h \cdot tan45°}{tan65°}$$

$$h - \frac{h \cdot tan45°}{tan65°} = 20m \cdot tan45°$$

$$h \cdot \left(1 - \frac{tan45°}{tan65°}\right) = 20m \cdot tan45°$$

$$h = \frac{20m \cdot tan45°}{1 - \frac{tan45°}{tan65°}} \approx 37{,}47m$$




Der Baum ist etwa 37,5 m hoch.
(Alternativ mit Sinussatz)

19. Berechne die Seitenlänge mithilfe des Satzes von Pythagoras als Abstände zweier Punkte:

$$a = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} =$$
$$= \sqrt{(3-6)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{34}$$

b und c analog:

$$b = 5\ und\ c = \sqrt{37}$$

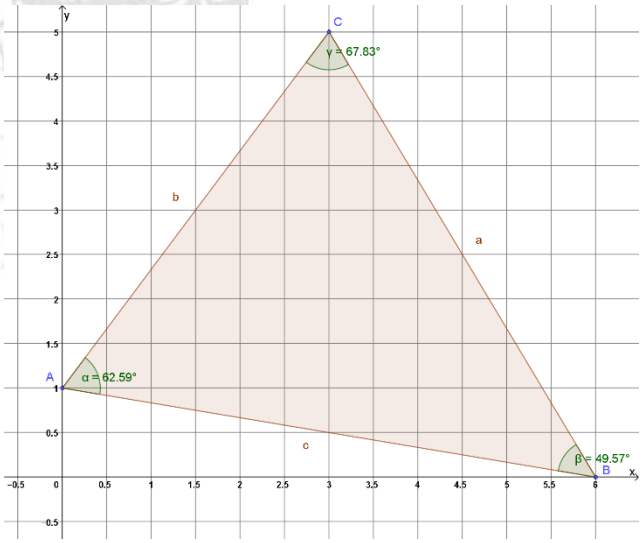
Mit dem Kosinussatz gilt:

$$\sqrt{34}^2 = 5^2 + \sqrt{37}^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{37} \cdot cos\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{34}^2 - 5^2 - \sqrt{37}^2}{-2 \cdot 5 \cdot \sqrt{37}} \approx 0{,}4603$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 62{,}59°$$

$$\beta\ und\ \gamma\ analog: \beta \approx 49{,}75°\ und\ \gamma \approx 67{,}83°$$



## Lösungen zu den Zusatzaufgaben:

20. a) $(3y - 2x)(-2x - 3y) = (-2x + 3y)(-2x - 3y) = 4x^2 - 9y^2$ ; b) $\left(\sqrt{3}s + t^2\right)^2 = 3s^2 + 2\sqrt{3}st^2 + t^4$

c) $\left(\frac{1}{8}p^3 - 1\right)^2 = \frac{1}{64}p^6 - \frac{1}{4}p^3 + 1$ ; d) $\sqrt{2x}\left(\sqrt{8xy} + \sqrt{6x^3}\right) = \sqrt{16x^2y} + \sqrt{12x^4} = 4x\sqrt{y} + 2\sqrt{3}x^2$

21.

| Ist Element aus: | N | Z | Q | R |
|---|---|---|---|---|
| $-\left(\sqrt{2}\right)^2 = -2$ | / | ja | j ja | ja |
| $15,\overline{23} = 15\frac{23}{99}$ | / | / | ja | ja |
| $\pi$ | / | / | / | ja |
| $\sqrt{1,69}$= 1,3 | / | / | ja | ja |
| $6^{2,5} = 6^{\frac{5}{2}} = \sqrt{6^5} = 36\sqrt{6}$ | / | / | / | ja |

22. a) $\left(7^{-\frac{1}{6}}\right)^3 = 7^{-\frac{1}{6}\cdot 3} = 7^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{7}$ ; b) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} : \sqrt[4]{3} = 3^{-\frac{1}{3}} : 3^{\frac{1}{4}} = 3^{-\frac{7}{12}}$

c) $(3x^3)^{-\frac{1}{4}} \cdot (27x)^{-\frac{1}{4}} = (81x^4)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81x^4}} = \frac{1}{3x}$ ; d) $\sqrt{(-a-b)^2} = |-a-b| = |a+b|$

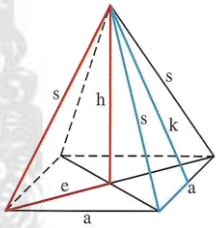
23. a) $y^2 = 0,25$ ➔ $|y| = \sqrt{0,25}$ ➔ $y_1 = -0,5$; $y_2 = 0,5$

b) $z^5 + 1024 = 0$ ➔ $z^5 = -1024$ ➔ $z = -\sqrt[5]{1024} = -4$ (Vorsicht: $\sqrt[5]{-1024}$ ist nicht definiert!)

c) $\sqrt[3]{4x} = 5$ ➔ $4x = 125$ ➔ $x = \frac{125}{4} = 31,25$

24. $a = \sqrt{G} = \sqrt{1225m^2}$= 35 m Seitenfläche A = 2000 m² : 4 = 500 m²

$A = \frac{1}{2}ak \Rightarrow k = \frac{2A}{a} = 28\frac{4}{7}m$ h = $\sqrt{k^2 - (0,5a)^2}$ ≈**22,6 m**




25. a) $\sin\alpha \cdot (\tan\alpha)^{-1} = \sqrt{1 - (\sin\alpha)^2}$

$Es\ gilt$: $\sin\alpha \cdot (\tan\alpha)^{-1} = \sin\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha$

$Es\ gilt\ auch$: $\sqrt{1 - (\sin\alpha)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha} = \cos\alpha$

b) $\tan\alpha \cdot \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$